



Faglig kontakt under eksamen:
Xavier Raynaud: tlf. 73 59 35 46

EKSAMEN I MATEMATIKK 4N (TMA4125)

Bokmål
Onsdag 21. mai 2008
09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator(HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 11.06.2007

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn de inverse Laplacetransformerte av funksjonene

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2}, & G(s) &= \frac{s - 2}{s(s^2 + 3s + 2)}, \\ X(s) &= -\frac{3e^{-s}}{s^2 + 3s + 2}, & Y(s) &= \frac{e^{-s}(s - 2)}{s(s^2 + 3s + 2)}. \end{aligned}$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) - 3y(t) - 3u(t - 1) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + u(t - 1) \end{cases}$$

med $x(0) = y(0) = 0$ og der u er trinnfunksjonen.

Oppgave 2 Funksjonen f er gitt på intervallet $0 < x < 1$ ved

$$f(x) = x$$

La g være den like (jevne) periodiske utvidelsen av f med periode 2, og la h være den odde, periodiske utvidelsen av f med periode 2.

- a) Skisser grafene til g og h for $-2 < x < 2$. Beregn (Fourier-)sinusrekken til f . Hva er summene av cosinusrekken og sinusrekken i punktet $x = 1$?
- b) Vis at (Fourier-)cosinusrekken til f er lik

$$(*) \quad \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x)$$

Bruk (*) til å finne summen av rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$$

Oppgave 3

- a) Funksjonen $u(x, t)$ tilfredsstiller ligningen

$$(1) \quad u_{tt} = u_{xx} \quad \text{for } 0 < x < \pi, t > 0$$

og randbetingelsene

$$(2) \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0.$$

Finn alle funksjoner på formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller disse kravene.

- b) Vis at ligningen (1) sammen med randbetingelsene (2) tilfredstiller superposisjonsprinsippet. Finn løsningen til (1) og (2) som i tillegg tilfredstiller startbetingelsene

$$u(x, 0) = \cos^2(x), \quad u_t(x, 0) = \cos(3x)$$

Oppgave 4

- a) Vi vil løse ligningen

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = x u(x, y)$$

på firkanten $[0, 1] \times [0, 1]$ med randbetingelser

$$u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = x \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, y) = 0, \quad \text{for } 0 \leq y \leq 1,$$

$$u(1, y) = 1, \quad \text{for } 0 \leq y \leq 1.$$

La $h = \frac{1}{3}$ være skrittlengden for det gitteret som er gitt av punktene $(x_i, y_j) = (ih, jh)$ for $i, j = 0, \dots, 3$. Sett opp et system av ligninger for $u_{1,1}$, $u_{2,1}$, $u_{1,2}$ og $u_{2,2}$, der $u_{i,j}$ er en tilnærming av $u(x_i, y_j)$.

b) Utfør ett steg med Gauss-Seidel iterasjon på systemet

$$\begin{pmatrix} -109 & 27 & 27 & 0 \\ 27 & -110 & 0 & 27 \\ 27 & 0 & -109 & 27 \\ 0 & 27 & 27 & -110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -45 \\ -9 \\ -45 \end{pmatrix}$$

ved å begynne i punktet $(1, 1, 1, 1)^T$. Bruk 4 siffrers nøyaktighet.

Oppgave 5

a) La P være det interpolasjonspolynomet med laveste grad for følgende punkt

x_k	0	0.25	0.5	0.75	1
$P(x_k)$	1	2.25	5	10.75	21

Finn P .

b) Bruk Simpsons regel med $\Delta x = 0.25$ og regn ut

$$\int_0^1 P(x) dx.$$

Kommenter svaret.

Tabell over Laplacetransformerte

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n ($n = 0, 1, 2, \dots$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_i, i = 0, 1, \dots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + \frac{1}{2}hf''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) - \frac{1}{2}hf''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12}h^2f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)} \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \\ \text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \end{aligned}$$

- En 2. ordens Runge-Kutta metode (Heun) for $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= h \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{K}_2 &= h \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2} (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \end{aligned}$$