

Matematikk 4 M/N - Vår 2008

Kort Introduksjon

Januar 7. 2008

Fourier rekker



Joseph Fourier (1768-1830)
Fransk matematikker og fysikker.

- ▶ Fourier var den første å bruke trigonometriske rekker.

Fourier rekker



Joseph Fourier (1768-1830)
Fransk matematiker og fysiker.

- ▶ Fourier var den første å bruke trigonometriske rekker. Han studerte spredningen av varmen.

Fourier rekker



Joseph Fourier (1768-1830)
Fransk matematiker og fysiker.

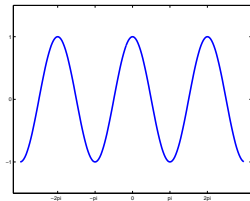
- ▶ Fourier var den første å bruke trigonometriske rekker. Han studerte spredningen av varmen.
- ▶ Det tok 100 år før teorien ble helt akseptert.

Trigonometriske rekker

- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$

Trigonometriske rekker

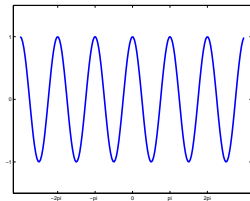
- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$



$\cos(x)$

Trigonometriske rekker

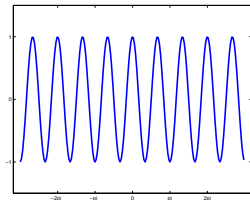
- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$



$\cos(2x)$

Trigonometriske rekker

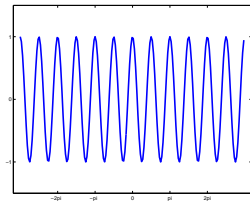
- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$



$\cos(3x)$

Trigonometriske rekker

- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$



$\cos(4x)$

Trigonometriske rekker

- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$
- ▶ Man lager en sum (en so kalt linear kombinasjon) av $\cos(nx)$ og $\sin(nx)$ med godt valgte koeffisienter a_n og b_n .

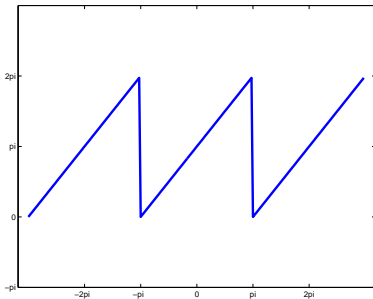
$$a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \dots$$

Trigonometriske rekker

- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$
- ▶ Man lager en sum (en so kalt linear kombinasjon) av $\cos(nx)$ og $\sin(nx)$ med godt valgte koeffisienter a_n og b_n .

$$a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \dots$$

- ▶ Gitt en vilkårlig periodisk funksjon

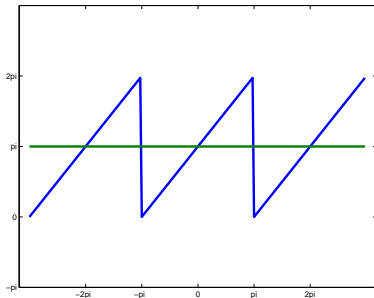


Trigonometriske rekker

- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$
- ▶ Man lager en sum (en so kalt linear kombinasjon) av $\cos(nx)$ og $\sin(nx)$ med godt valgte koeffisienter a_n og b_n .

$$a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \dots$$

- ▶ Gitt en vilkårlig periodisk funksjon



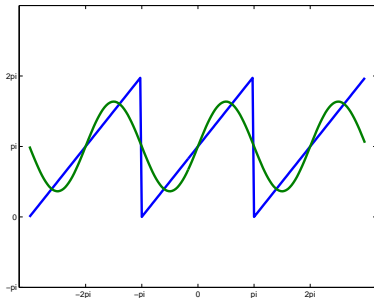
π

Trigonometriske rekker

- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$
- ▶ Man lager en sum (en so kalt linear kombinasjon) av $\cos(nx)$ og $\sin(nx)$ med godt valgte koeffisienter a_n og b_n .

$$a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \dots$$

- ▶ Gitt en vilkårlig periodisk funksjon



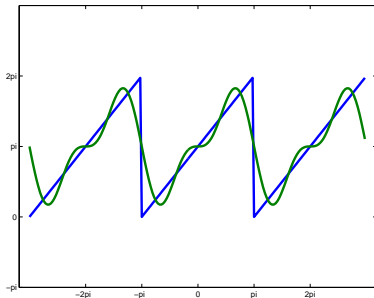
$$\pi + 2 \sin(x)$$

Trigonometriske rekker

- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$
- ▶ Man lager en sum (en so kalt linear kombinasjon) av $\cos(nx)$ og $\sin(nx)$ med godt valgte koeffisienter a_n og b_n .

$$a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \dots$$

- ▶ Gitt en vilkårlig periodisk funksjon



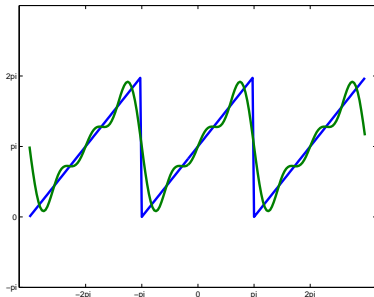
$$\pi + 2 \sin(x) - 1 \sin(2x)$$

Trigonometriske rekker

- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$
- ▶ Man lager en sum (en so kalt linear kombinasjon) av $\cos(nx)$ og $\sin(nx)$ med godt valgte koeffisienter a_n og b_n .

$$a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \dots$$

- ▶ Gitt en vilkårlig periodisk funksjon



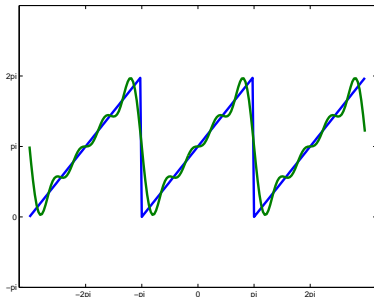
$$\pi + 2 \sin(x) - 1 \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x)$$

Trigonometriske rekker

- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$
- ▶ Man lager en sum (en so kalt linear kombinasjon) av $\cos(nx)$ og $\sin(nx)$ med godt valgte koeffisienter a_n og b_n .

$$a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \dots$$

- ▶ Gitt en vilkårlig periodisk funksjon



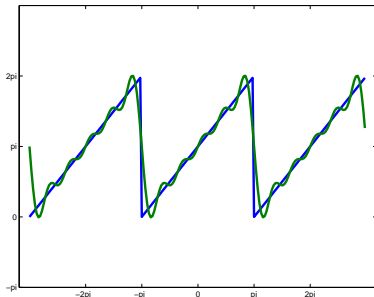
$$\pi + 2 \sin(x) - 1 \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) + -\frac{1}{2} \sin(4x)$$

Trigonometriske rekker

- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$
- ▶ Man lager en sum (en so kalt linear kombinasjon) av $\cos(nx)$ og $\sin(nx)$ med godt valgte koeffisienter a_n og b_n .

$$a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \dots$$

- ▶ Gitt en vilkårlig periodisk funksjon



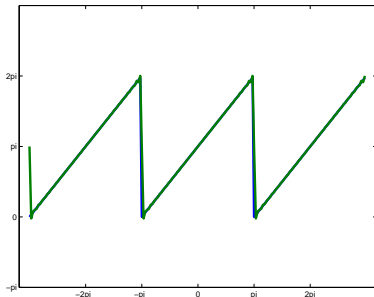
$$\pi + 2 \sin(x) - 1 \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{1}{2} \sin(4x) + \frac{2}{5} \sin(5x)$$

Trigonometriske rekker

- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$
- ▶ Man lager en sum (en so kalt linear kombinasjon) av $\cos(nx)$ og $\sin(nx)$ med godt valgte koeffisienter a_n og b_n .

$$a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \dots$$

- ▶ Gitt en vilkårlig periodisk funksjon



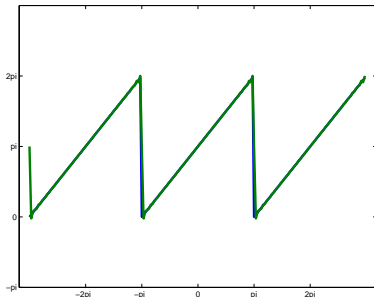
$$\pi + 2 \sin(x) - 1 \sin(2x) + \dots - \frac{1}{50} \sin(100x)$$

Trigonometriske rekker

- ▶ Trigonometriske funksjoner: $\cos(x)$, $\sin(x)$
- ▶ Man lager en sum (en so kalt linear kombinasjon) av $\cos(nx)$ og $\sin(nx)$ med godt valgte koeffisienter a_n og b_n .

$$a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \dots$$

- ▶ Gitt en vilkårlig periodisk funksjon



$$\pi + 2 \sin(x) - 1 \sin(2x) + \dots - \frac{1}{50} \sin(100x)$$

- ▶ Vi skal lære å bruke Fourier rekker.

Partielle differentielle ligninger

- ▶ Fysikke variabler:

Partielle differentielle ligninger

- ▶ Fysikke variabler:
 - ▶ Temperatur T i et leggemet

Partielle differentielle ligninger

- ▶ Fysikke variabler:
 - ▶ Temperatur T i et leggemet
 - ▶ Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske

Partielle differentielle ligninger

- ▶ Fysikke variabler:
 - ▶ Temperatur T i et leggemet
 - ▶ Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
 - ▶ Elektromagnetiske felt E, B

Partielle differentielle ligninger

► Fysikke variabler:

- Temperatur T i et leggemet
- Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- Elektromagnetiske felt E, B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

Partielle differentielle ligninger

- ▶ Fysiske variabler:

- ▶ Temperatur T i et leggemet
- ▶ Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- ▶ Elektromagnetiske felt E, B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

- ▶ Fysiske lover \Rightarrow Partielle differentielle ligninger

Partielle differentielle ligninger

- ▶ Fysiske variabler:

- ▶ Temperatur T i et leggemet
- ▶ Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- ▶ Elektromagnetiske felt E, B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

- ▶ Fysiske lover \Rightarrow Partielle differentielle ligninger

- ▶ Varmeligningen (Fourier, 1822)

Partielle differentielle ligninger

► Fysikke variabler:

- Temperatur T i et leggemet
- Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- Elektromagnetiske felt E, B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

► Fysiske lover \Rightarrow Partielle differentielle ligninger

- Varmeligningen (Fourier, 1822)

$$T_t = c(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz})$$

Partielle differentielle ligninger

▶ Fysiske variabler:

- ▶ Temperatur T i et legget
- ▶ Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- ▶ Elektromagnetiske felt E, B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

▶ Fysiske lover \Rightarrow Partielle differentielle ligninger

- ▶ Varmeligningen (Fourier, 1822)
- ▶ Navier-Stokes (1827)

Partielle differentielle ligninger

► Fysikke variabler:

- Temperatur T i et leggemet
- Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- Elektromagnetiske felt E, B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

► Fysiske lover \Rightarrow Partielle differentielle ligninger

- Varmeligningen (Fourier, 1822)
- Navier-Stokes (1827)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_i^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

der $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_2)$ er hastigheten og p trykket.

Partielle differentielle ligninger

- ▶ Fysikke variabler:

- ▶ Temperatur T i et leggemet
- ▶ Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- ▶ Elektromagnetiske felt E, B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

- ▶ Fysiske lover \Rightarrow Partielle differentielle ligninger

- ▶ Varmeligningen (Fourier, 1822)
- ▶ Navier-Stokes (1827)
- ▶ Maxwell's ligningen (1864)

Partielle differentielle ligninger

► Fysikke variabler:

- Temperatur T i et leggemet
- Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- Elektromagnetiske felt E , B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

► Fysiske lover \Rightarrow Partielle differentielle ligninger

- Varmeligningen (Fourier, 1822)
- Navier-Stokes (1827)
- Maxwell's ligningen (1864)

$$\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Partielle differentielle ligninger

- ▶ Fysikke variabler:

- ▶ Temperatur T i et leggemet
- ▶ Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- ▶ Elektromagnetiske felt E, B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

- ▶ Fysiske lover \Rightarrow Partielle differentielle ligninger

- ▶ Varmeligningen (Fourier, 1822)
- ▶ Navier-Stokes (1827)
- ▶ Maxwell's ligningen (1864)
- ▶ Black-Scholes equation (1973)

Partielle differentielle ligninger

▶ Fysikke variabler:

- ▶ Temperatur T i et leggemet
- ▶ Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- ▶ Elektromagnetiske felt E, B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

▶ Fysiske lover \Rightarrow Partielle differentielle ligninger

- ▶ Varmeligningen (Fourier, 1822)
- ▶ Navier-Stokes (1827)
- ▶ Maxwell's ligningen (1864)
- ▶ Black-Scholes equation (1973)

Europeisk opsjon: En opsjon er en rett, men ikke en plikt, til på et tidspunkt (T) å kjøpe eller selge verdipapirer (typisk aksjer) eller varer (S) til en på forhåndsavtalt pris (K).

Partielle differentielle ligninger

► Fysikke variabler:

- Temperatur T i et leggemet
- Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- Elektromagnetiske felt E, B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

► Fysiske lover \Rightarrow Partielle differentielle ligninger

- Varmeligningen (Fourier, 1822)
- Navier-Stokes (1827)
- Maxwell's ligningen (1864)
- Black-Scholes equation (1973)

Europeisk opsjon: En opsjon er en rett, men ikke en plikt, til på et tidspunkt (T) å kjøpe eller selge verdipapirer (typisk aksjer) eller varer (S) til en på forhåndsavtalt pris (K).

Prisen $V(t, S)$ av opsjonen er gitt ved

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Partielle differentielle ligninger

▶ Fysikke variabler:

- ▶ Temperatur T i et leggemet
- ▶ Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- ▶ Elektromagnetiske felt E, B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

▶ Fysiske lover \Rightarrow Partielle differentielle ligninger

- ▶ Varmeligningen (Fourier, 1822)
- ▶ Navier-Stokes (1827)
- ▶ Maxwell's ligningen (1864)
- ▶ Black-Scholes equation (1973)

Europeisk opsjon: En opsjon er en rett, men ikke en plikt, til på et tidspunkt (T) å kjøpe eller selge verdipapirer (typisk aksjer) eller varer (S) til en på forhåndsavtalt pris (K).

Prisen $V(t, S)$ av opsjonen er gitt ved

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

som er equivalent med $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: Varmeligningen!

Partielle differentielle ligninger

▶ Fysikke variabler:

- ▶ Temperatur T i et leggemet
- ▶ Tetthet ρ , hastighet \mathbf{u} , trykk p i en væske
- ▶ Elektromagnetiske felt E, B

er funksjoner av tid (t) og rom (x, y, z). Dimensjon=4.

▶ Fysiske lover \Rightarrow Partielle differentielle ligninger

- ▶ Varmeligningen (Fourier, 1822)
- ▶ Navier-Stokes (1827)
- ▶ Maxwell's ligningen (1864)
- ▶ Black-Scholes equation (1973)

▶ Vi skal lære å løse enkelte partielle differentielle ligninger.

Numeriske løsninger av PDL

- ▶ Millenium problems (Clay Mathematics Institute):

Numeriske løsninger av PDL

- ▶ Millenium problems (Clay Mathematics Institute):
Vise at Navier Stokes ligningen har løsninger.

Numeriske løsninger av PDL

- ▶ Millenium problems (Clay Mathematics Institute):
Vise at Navier Stokes ligningen har løsninger.
Vinn 1 million dollar!

Numeriske løsninger av PDL

- ▶ Millenium problems (Clay Mathematics Institute):
Vise at Navier Stokes ligningen har løsninger.
Vinn 1 million dollar!



Simulation of the Shuttle launch configuration using NASA's OVERSET computational fluid dynamics tools.

Numeriske løsninger av PDL

- ▶ Millenium problems (Clay Mathematics Institute):
Vise at Navier Stokes ligningen har løsninger.
Vinn 1 million dollar!



NUMERISKE SIMULERING

Simulation of the Shuttle launch configuration using NASA's OVERSET computational fluid dynamics tools.

Numeriske løsninger av PDL

- ▶ Millenium problems (Clay Mathematics Institute):
Vise at Navier Stokes ligningen har løsninger.
Vinn 1 million dollar!



NUMERISKE SIMULERING

Simulation of the Shuttle launch configuration using NASA's OVERSET computational fluid dynamics tools.

- ▶ Vi skal lære numeriske metoder til å løse PDL.