NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4125/30/35 Matematikk 4D**

Faglig kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C:
Bestemt, enkel kalkulator
Et stemplet gult A5-ark med egne håndskrevne notater og formler (begge sider)
Vedlagt formelark

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes og skal inneholde nok detaljer til at det kommer klart fram svar har framkommet.
Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 13

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La u være heavisidefunksjonen

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

a) Vis at

$$\mathcal{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{for } a \geq 0.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y''(t) + y(t) = u(t-1) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

og skisser løsningen.

Forslag til løsning: a) Vi beregner

$$\mathcal{L}(u(t-a)) = \int_0^\infty u(t-a)e^{-ts}\,dt = \int_a^\infty e^{-ts}\,dt = \frac{e^{-as}}{s}.$$

b) Vi laplacetransformerer

$$s^2Y + Y = \frac{e^{-s}}{s},$$

og får

$$Y = \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}.$$

Merk at

$$\mathcal{L}(e^{it}) = \frac{1}{s-i} = \frac{s+i}{s^2+1}$$

og

$$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}.$$

slik at

$$Y = \mathcal{L}(u(t-1)) \cdot \mathcal{L}(\sin t).$$

Vi inverstransformerer, og får

$$y(t) = \int_0^t u(t-\tau-1)\sin\tau\,d\tau = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 1, \\ \int_0^{t-1} \sin\tau\,d\tau = 1 - \cos(t-1) & \text{if } t \geq 1 \end{cases}$$

eller

$$y(t) = u(t-1)(1-\cos(t-1)).$$

Oppgave 2 Denne teller som totalt en deloppgave.

a) Finn fourierrekken til funksjonen

$$f(x) = \sin(3x) + \sin(x) + 1$$

på intervallet $[-\pi, \pi]$.

b) Finn Fouriertransformasjonen til funksjonen $f(x) = 6x\exp(-5x^2)$.

c) Gitt funksjonen

$$u(x, y) = xy + y^2 + e^{2x} + \sin y.$$

Beregn gradienten til u.

Forslag til løsning:

Prøver man å beregne fourierrekken til f, vil man bare få f, siden alle ledd er elementer i den ortogonale basisen $\{1, \cos nt, \sin nt\}_{n\geq 1}$. Fourierrekken til f er altså

$$f(x) = \sin(3x) + \sin(x) + 1.$$

Husk at $\mathcal{F}(f'(x))(w) = iw\mathcal{F}(f(x))(w)$ og merk at

$$f(x) = 6x\exp(-5x^2) = -\frac{6}{10}\frac{d}{dx}\exp(-5x^2),$$

slik at

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big(6x\exp(-5x^2)\Big) &= \mathcal{F}\Big(-\frac{6}{10}\frac{d}{dx}\exp(-5x^2)\Big) \\
&= -\frac{6}{10}iw\mathcal{F}\Big(\exp(-5x^2)\Big) \\
&= \frac{6iw}{10\sqrt{10}}\exp\Big(-w^2/20\Big).
\end{aligned}$$

Vi beregner

$$u_x = y + 2e^{2x}, \quad u_y = x + 2y + \cos y,$$

og følgelig blir gradienten

$$\nabla u = (y + 2e^{2x}, x + 2y + \cos y).$$

Oppgave 3

Finn løsningen til bølgelikningen

$$u_{tt} = u_{xx},$$

for $0 \leq x \leq \pi$ og $t \geq 0$ med randkrav

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

og initialkrav

$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0.$$

Forslag til løsning:

Vi skriver først

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

Innsetting i likningen gir

$$F(x)G''(t) = F''(x)G(t),$$

og dersom vi deler på $F(x)G(t)$, får vi

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)}.$$

Siden x og t skal kunne varieres uavhengig av hverandre, må vi ha at

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)} = k$$

der k er en foreløbig ubestemt konstant. Vi ganger opp med $c^2F(x)G(t)$ og bytter fortegn på k, slik at

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

og

$$G''(t) + kG(t) = 0.$$

Vi skal først prøve å finne ut hva k kan være. Vi kan bruke F og randkravene

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

til dette. Erfaring tilsier at vi først kikker på

$$F''(x) + kF(x) = 0.$$

Dersom $k = 0$, får vi

$$F''(x) = 0$$

som gir

$$F(x) = Ax + B.$$

Dette er ikke en iteressant løsning, for

$$F(0)G(t) = u(0, t) = 0,$$

må enten $F(0) = 0$ eller $G(t) = 0$. At $G(t) = 0$, slik at $u(x, t) = 0$, er en gyldig løsning av bølgelikningen, som også tilfredsstiller randkravene. Dette er ikke så interessant løsning, så vi går for $F(0) = 0$, som impliserer $B = 0$. Det andre randkravet

$$u(\pi, t) = 0$$

gir likeledes at $F(\pi) = 0$, altså at $A\pi = 0$, som impliserer at $A = 0$. Dette impliserer igjen at $u(x, t) = 0$, vi konkluderer at $k = 0$ og $F(x) = 0$ ikke er en interessant løsning av problemet.

La oss prøve $k < 0$. I så fall løses

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

av

$$F(x) = Ae^{\sqrt{-k}x} + Be^{-\sqrt{-k}x}$$

Dersom vi nå bruker randkravene, får vi de to likningene

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ Ae^{\sqrt{-k}\pi} + Be^{-\sqrt{-k}\pi} &= 0 \end{aligned}$$

Dersom $k \neq 0$, er determinanten til dette systemet gitt ved

$$e^{\sqrt{-k}\pi} + e^{-\sqrt{-k}\pi} \neq 0$$

og vi konkluderer med at $A = B = 0$, slik at $F(x) = 0$. Altså er heller ikke $k < 0$ en interessant løsning.

Dersom $k > 0$, får vi

$$F(x) = A\cos\sqrt{k}x + B\sin\sqrt{k}x.$$

Bruker vi randkravet $u(x,t) = 0$, får vi

$$A = 0,$$

og krever vi

$$F(\pi) = B\sin(\sqrt{k}\pi)G(t) = 0,$$

kan dette oppnås ved å sette $B = 0$, som er uinteressant siden da blir $u(x,t) = 0$, eller ved å kreve

$$\sqrt{k} = n.$$

slik at

$$k = n^2.$$

Vi ser også at $n > 0$, for dersom $n < 0$ byttes bare fortegnet på B, som ennå er ubestemt. Ved å ta en titt på den endelige løsningen av problemet nedenfor, ser man at B kommer til å bli overflødig, så vi velger $B = 1$.

Ligningene

$$G''(t) + nG(t) = 0.$$

løses av

$$G_n(t) = A_n\cos nt + B_n\sin nt,$$

så de generelle løsningene til bølgeligningen med gitte randkrav blir

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= F(x)G_n(t) \\ &= (A_n\cos nt + B_n\sin nt)\sin nx. \end{aligned}$$

Vi har ennå ikke tatt stilling til initialkravene. Det kan vi klare ved å skrive

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\cos nt + B_n\sin nt)\sin nx. \end{aligned}$$

Dersom vi krever

$$\sin(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin nx,$$

ser vi at $A_1 = 1$ og $A_n = 0$ gjør jobben. På samme vis, dersom

$$0 = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c \frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

må $B_n = 0$ for alle n. Alt i alt blir løsningen

$$u(x, t) = \cos t \sin x.$$

Oppgave 4 Utled løsningsformelen

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{\frac{-(x-v)^2}{4c^2 t}} \, dv, \quad t > 0,$$

for varmelikningen

$$u_t = c^2 u_{xx},$$

på hele x-aksen med initialkrav

$$u(x, 0) = f(x).$$

Forslag til løsning:

Vi antar at $2c^2 = 1$, for da blir regningen litt enklere. For andre verdier av c blir utledningen identisk. Fouriertransformen til u_t med hensyn på x blir

$$\mathcal{F}(u_t) = \widehat{u_t}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t, x) e^{-ixw} \, dx,$$

eller

$$\mathcal{F}(u_t) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} u_{xx}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_{xx}(t, x) e^{-ixw} \, dx.$$

Dersom u er glatt og tilfredsstiller vekstkravet med hensyn på x, kan vi beregne

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} e^{-ixw} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw} \, d(u_x) = -\int_{-\infty}^{\infty} u_x \, d(e^{-ixw}) = iw \int_{-\infty}^{\infty} u_x e^{-ixw} \, dx.$$

Den samme beregningen for u gir

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x e^{-ixw} \, dx = iw \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-ixw} \, dx,$$

slik at

$$\mathcal{F}(u_t) = \frac{-w^2}{2}\mathcal{F}(u), \quad \mathcal{F}(u) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{-ixw}\,dx$$

Merk at vi også har

$$\mathcal{F}(u_t) = (\mathcal{F}(u))_t,$$

og derfor tilfredsstiller $\mathcal{F}(u)$ den ordinære differensiallikningen

$$(\mathcal{F}(u))_t = \frac{-w^2}{2}\mathcal{F}(u)$$

som har generell løsning

$$\mathcal{F}(u)(t,w) = c(w)e^{\frac{-w^2}{2}t}.$$

Merk at initialbetingelsen impliserer

$$\mathcal{F}(u)(0,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixw}\,dx = \mathcal{F}(f),$$

slik at

$$c(w) = \mathcal{F}(f).$$

Nå er

$$\mathcal{F}(u)(t,w) = \mathcal{F}(f)\cdot e^{\frac{-w^2}{2}t}.$$

Siden $e^{-x^2/2}$ er sin egen fouriertransform, kan vi skrive

$$e^{\frac{-w^2}{2}t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2t}}e^{-ixw}\,dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathcal{F}(e^{\frac{-x^2}{2t}}),$$

silk at

$$\mathcal{F}(u)(t,w) = \mathcal{F}(f)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\mathcal{F}(e^{\frac{-x^2}{2t}})\right),$$

og konvolusjonsteoremet gir til slutt

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}(f \star e^{\frac{-x^2}{2t}}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{-(x-p)^2}{2t}}\,dp.$$

Det er mulig å vise at

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = f(x),$$

men dette er ikke pensum i M4.

Oppgave 5 Finn polynomet av grad 3 som interpolerer $f(x) = e^x$ i punktene $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ og $x = 3$.

Forslag til løsning: Laplace interpolasjon:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} + \frac{x(x-2)(x-3)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)}e + \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-3)}{2\cdot 1\cdot(-1)}e^2 + \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{3\cdot 2\cdot 1}e^3 \\ &= \frac{-x^3+6x^2-11x+6}{6} + \frac{x^3-5x^2+6x}{2}e + \frac{-x^3+4x^2-3x}{6}e^2 + \frac{x^3-3x^2+2x}{6}e^3. \end{aligned}$$

Oppgave 6 Vis at

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

er en andre ordens approksimasjon til $f''(x)$. *Hint:* Bruk Taylor-rekker. Du kan forutsette at f er tilstrekkelig glatt.

Forslag til løsning: Taylor-utvikler $f(x \pm h)$ rundt x:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} =& \frac{1}{h^2}\Bigg(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_1) \\ &- 2f(x) \\ &+ f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_2)\Bigg) \\ =& f''(x) + \frac{h^2}{4!}\Big(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)\Big) \qquad \text{(Middelverdisetningen)} \\ =& f''(x) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi). \end{aligned}$$

Her er $x-h < \xi_1 < x$, $x < \xi_2 < x+h$ og $\xi_1 < \xi < \xi_2$, så $x-h < \xi < x+h$. Forutsatt at $f^{(4)}(x)$ er kontinuerlig i et område rundt x så finnes en konstant C slik at $|f^{(4)}| < C$ i området, og

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \right| < \frac{C}{12}h^2.$$

Tilnærmelsen er av orden 2.

Oppgave 7 La $Q[f]$ være en kvadraturregel som beregner en tilnærmelse til integralet

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx.$$

Om denne kvadraturregelen vet vi følgende: Det finnes en $s \in (a, b)$ slik at

$$I[f] - Q[f] = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(s).$$

Forklar hva en kvadraturregels presisjonsgrad er, og finn presisjonsgraden til ovennevnte kvadraturregel. Svaret skal begrunnes.

Forslag til løsning: En kvardaturregels presisjonsgrad er det høyeste heltallet d slik at

$$I[p] = Q[p], \qquad \text{for alle } p \in \mathbb{P}_d.$$

Et polynom av grad q er gitt ved

$$p_q(x) = a_q x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Dermed er $p^{(q+1)}(x) = 0$, mens $p^{(q)}(x) \neq 0$ hvis $a_q \neq 0$.
Og vi kan konkludere med at kvadraturformelen over har presisjonsgrad 3.

Oppgave 8

a) Gitt ligningen

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 1.$$

Skriv ned en *fullstending* algoritme for å finne en tilnærmelse til $y(2)$ ved bruk av implisitt (baklengs) Eulers metode, med steglengde $h = 1/N$.

Utfør et steg med algoritmen med $h = 0.1$, dvs. finn en tilnærmelse til $y(0.1)$.

NB! Algoritmen må gjerne skrives i form av kode i f.eks. MATLAB eller Python. Den skal uansett være tilstrekkelig detaljert til at den kan implementeres.

Forslag til løsning: En passende python-kode kan være:

```
from numpy import sqrt

N = 20    # antall steg
h = 2/N   # steglengde
y = 1     # initialverdi
tol = 10.0**-6
err = 1.0
z = x = y

for n in range(N):
    while err>tol:
        z = y+h*sqrt(z)
        err = np.abs(x-z)
        x = z
    y = z
print(y)
```

For å beregne et skritt med metoden, må vi kjøre fikspunktiterasjoner på likningen

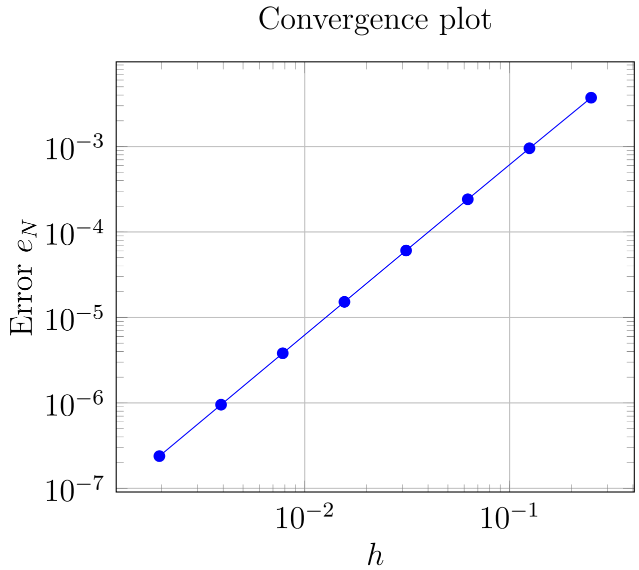
$$y_1 = y_0 + h\sqrt{y_1}$$

eller

$$z = 1 + \cdot\sqrt{z}/10.$$

Likningen er allerede på formen $z = g(z)$, så vi kan umiddelbart gå igang, og tar $z_1 = 1$ som initialgjetning. Etter elleve iterasjoner får vi $z_6 = 1.105124895713752$. Siden $z_5 = 1.105124369882724$, vil while-løkken sette strek her, og definere $y_1 = z_6$.

b) Vi antar nå at ligningen over løses med en ikke oppgitt metode. Feilen $e_N = |y(2) - y_N|$ er målt for ulike skrittlengder $h = 2/N$, og resultatet er presentert i følgende konvergensplott:



Hva mener vi med en metodes orden, og hvordan kan ordenen leses av et konvergensplott som dette?

Hva er denne metodens orden?

Forslag til løsning: Metoden er av orden p dersom det fins en konstant $C > 0$ slik at

$$|e_N| = |y_N - y(2)| \leq Ch^p,$$

hvor $Nh = 2$ i dette eksemepelet. Når h er tilstrekkelig liten, vil man i praksis observere at

$$|e_N| \approx Ch^p \qquad \Rightarrow \qquad \log|e_N| = p\log h + \log C.$$

I et logaratimisk plott vil altså feilen som funksjon av h bli en rett linje med stigningstall p. Her ser vi at når skrittlengden reduseres med en faktor 10 vil feilen reduseres med en faktor ca. 100 (fra ca. $8 \cdot 10^{-3}$ til ca. $8 \cdot 10^{-5}$). Metodens orden er altså 2.

Oppgave 9 Vi skal løse varmeligningen

$$u_t = u_{xx},$$

for $0 \leq x \leq 1$ og $t \geq 0$ med randkrav

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

og initialkrav

$$u(x,0) = x - x^2$$

Skriv en fullstendig algoritme, eventuelt i form av kode, som løser problemet numerisk med et eksplisitt skjema for $t \in [0,1]$. Bruk skrittlengder $h = 1/M$ og $k = 1/N$ i henholdsvis $x-$ og $t-$retning.

La $h = 0.2$ og $k = 0.02$ og finn en approximasjon til løsningen $u(0.4, 0.02)$.

Anta at du bruker algoritmen med steglengder $h = k$. Hvordan vil du forvente at den numeriske løsningen oppfører seg over tid? Begrunn svaret.

Forslag til løsning: Velg h og k (eller M og N), la $x_i = ih$ og $t_n = kh$. For å tilnærme ligningen i et punkt (x_i, t_n), bruk en foroverdifferanse i $t-$retningen og en sentraldifferanse i $x-$retningen. Dvs:

$$\frac{u(x_i, t_n + k) - u(x_i, t_n)}{k} \approx \frac{u(x_i + h, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i - h, t_n)}{h^2}$$

La $U_i^n \approx u(x_i, t_n)$ og differenseskjemaet kan skrives som

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}.$$

Ved å inkudere start- og rand-betingelser kan algoritmen skrives som

Oppgi M og N.
Sett $h = 1/M$, $k = 1/N$ og $r = k/h^2$.
Sett inn startverdiene: $U_{i0} = ih(1 - ih), \qquad i = 0, 1, \dots, M.$
For $n = 0, 1, \dots, N - 1$:

$$\begin{aligned} &U_0^{n+1} = 0, \qquad U_M^{n+1} = 0, \\ &U_i^{n+1} = U_i^n + r(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n), \qquad i = 1, 2 \dots, M - 1 \end{aligned}$$

Med de oppgitte steglengdene har vi $u(0.4, 0.02) \approx U_2^1$. Vi vet at

$$U_1^0 = 0.16, \qquad U_2^0 = 0.24, \qquad U_3^0 = 0.24,$$

og

$$U_2^1 = U_2^0 + r(U_3^0 - 2U_2^0 + U_1^0) = 0.2.$$

Med $h = k$ vil $r = k/h^2 = 1/h > 1$. Vi vet at løsningen er ustabil for $r > 0.5$, så i det tilfellet vil den numeriske løsningen eksplodere.

Algoritmen kan skrives som Python-kode:

```python
import numpy as np

N = 50    # Number of steps in the t-direction
M = 5     # Number of steps in the x-direction

h = 1/M
k = 1/N
r = k/h**2

U = np.zeros((M+1,N+1))
# Array to store the solution

# Initial conditions
for i in range(M+1):
    xi = i*h
    U[i,0] = xi*(1-xi)

# Time-stepping algorithm
for n in range(N):
    for i in range(1,M):
        U[i,n+1] = U[i,n] + r*(U[i+1,n]-2*U[i,n]+U[i-1,n])
```

Fourier Transform

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} \, \mathrm{d}w$	$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} \, \mathrm{d}x$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{w^2 + a^2}$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\|w\|}}{a}$
$\begin{cases} 1 & \text{for } \|x\| < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin wa}{w}$

Laplace Transform

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\Gamma(n+1) = n!$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
$\delta(t - a)$	e^{-as}

$$\int x^n \cos ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, \mathrm{d}x$$
$$\int x^n \sin ax \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, \mathrm{d}x$$