1 Laplacetransform

Laplacetransform er en teknikk vi skal bruke til løse ordinære differensiallikninger. For det første er det en mye mer elegant teknikk enn den du lærte i M3, og for det andre takler den en bredere klasse av likninger.

Definisjon og grunnleggende egenskaper

La f være en funksjon definert for $t \geq 0$. Laplacetransformen til f er:

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = F(s).$$

Først kan man spørre seg hvilke funksjoner det er naturlig å finne laplacetransformen til. Vi noterer oss at $\mathcal{L}(f)$ er definert ved et uegentlig integral, og at dette bør konvergere.

Teorem 1.1. *La f en stykkvis kontinuerlig funksjon, og la a og $M > 0$ være reelle tall slik at*

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad \textit{for} \quad t \geq 0.$$

Integralet

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

konvergerer absolutt dersom $s > a$.

Bevis. Vi beregner:

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\right| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-st}\,dt \leq$$
$$M\int_0^\infty e^{at}e^{-st}\,dt \leq M\int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \frac{M}{s-a}. \square$$

Eksempel 1.2. Vi kan ikke beregne

$$\mathcal{L}(e^{t^2}) = \int_0^\infty e^{t^2-st}\,dt,$$

for e^{t^2} vokser for fort. Siden

$$\lim_{t\to\infty} e^{t^2-st} = \infty$$

kan integralet ikke konvergere. △

Eksempel 1.3. La f være funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{rasjonale } x \\ 0 & \text{irrasjonale } x \end{cases}$$

Vi kan ikke laplacetransformere denne funksjonen, for den er ikke stykkvis kontinuerlig. Den er faktisk diskontinuerlig overalt, og ikke en gang riemannintegrerbar. △

Eksempel 1.4. Så lenge $s > a$, kan vi fint beregne

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{s-a}. \quad △$$

Eksempel 1.5. Vi kan også beregne

$$\mathcal{L}(0) = \int_0^\infty 0e^{-st}\,dt = 0. \quad △$$

Heretter skal vi alltid anta at s er valgt slik at integralet konvergerer. Vi skal også anta f er stykkvis kontinuerlig og tilfredsstilller $|f| \leq Me^{at}$.

Et viktig spørsmål er hvorvidt man kan invertere laplacetransformen: Dersom to funksjoner har samme laplacetransform, må de være like som funksjoner? Slik du har lært funksjoner til nå, er svaret definitivt nei, som følgende eksempel viser.

Eksempel 1.6. La

$$g(t) = \begin{cases} e^{at} & t \neq 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

Som i eksemplet over, kan vi for $s > a$ beregne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g) &= \int_0^1 e^{(a-s)t}\,dt + \int_1^\infty e^{(a-s)t}\,dt \\ &= \frac{1}{s-a}, \end{aligned}$$

altså den samme som i eksempel 1.4. △

Eksemplet over kan fremstå som litt patologisk, men det er et viktig matematisk poeng at et integral ikke endres av at man bytter ut enkelte funksjonsverdier. I og med at laplacetransformen er et integral, kan vi med andre ord ikke forvente at det skal finnes en entydig invers, med mindre man er litt streng på hvilke funksjoner man laplacetransformerer.

En alternativ løsning er å omdefinere hva man mener med at to funksjoner er like; i avansert matematisk analyse bryr man seg ikke om at funksjoner har forskjellige funksjonsverdier i et og annet punkt, og da blir det lettere å snakke om invers laplacetransform. Vi har ikke mulighet til å gå inn på dette, men det er egentlig ikke så viktig for en ingeniør. Ingeniører bruker laplacetransform til å løse differensiallikninger, og da vil det gjerne være åpenbart fra anvendelsen hva som er den korrekte inverstransformen, selv om det ikke finnes noe matematisk entydig valg. Følgende teorem tar vi nå med uansett.

Teorem 1.7. *La f og g være stykkvis kontinuerlige funksjoner. Dersom*

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g),$$

må

$$f = g$$

overalt der f og g er kontinuerlige.

Dette teoremet forteller at dersom vi ser bort fra funksjonsverdier akkurat i sprang, vil den inverse laplacetransformen være entydig. Beviset er dessverre altfor hardt for dette kurset. Det finnes formler for invers laplacetransform. Men de er også for harde for oss, så vi skal bruke tabell i stedet. Dette er den vanligste måten å invertere laplacetransformer på.

Regneregler

Man løser ordinære differensiallikninger ved å bruke laplacetransform til å skrive dem om til algebraiske likninger. Det er duket for å introdusere triksene vi skal bruke.

> **Teorem 1.8.** *Laplacetransformen er lineær. Dersom a og b er reelle tall, er*
>
> $$\mathcal{L}(af+bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g).$$

Beviset for dette teoremet er så enkelt at vi dropper det.

Eksempel 1.9.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos t) &= \int_0^\infty e^{-st}\cos t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{it}+e^{-it}\right)e^{-st}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(i-s)t} + e^{-(i+s)t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i}+\frac{1}{s+i}\right) = \frac{s}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Her har vi brukt en omskrivning av Eulers formel:

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}. \qquad \triangle$$

Eksempel 1.10.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cosh t) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^t)+\mathcal{L}(e^{-t})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}\right) = \frac{s}{s^2-1}. \qquad \triangle\end{aligned}$$

> **Teorem 1.11.** *Dersom $s>0$ og $|f'(t)| \le Me^{at}$ er stykkvis kontinuerlig, er*
>
> $$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0).$$

Bevis. La $s>0$. Vi beregner

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f') &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt \\ &= f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \\ &= s\mathcal{L}(f) - f(0). \qquad \square\end{aligned}$$

Eksempel 1.12.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sinh t) &= s\mathcal{L}(\cosh t) + \cosh(0) \\ &= -s\frac{s}{s^2-1} + 1 = \frac{1}{s^2+1}. \qquad \triangle\end{aligned}$$

Under liknende betingelser på de høyere ordens deriverte, vil gjentatt bruk av teorem 1.14 gi formler av typen

$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

og

$$\mathcal{L}(f''') = s^3\mathcal{L}(f) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

og så videre.

Eksempel 1.13. Vi beregner først

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}.$$

La nå $f(t) = t^n$. Den n-te deriverte av f er:

$$f^n(t) = n!$$

og siden $f^k(0) = 0$ uansett k, får vi

$$n!\mathcal{L}(1) = s^n\mathcal{L}(t^n),$$

slik at

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \qquad \triangle$$

Vi tar to teoremer til.

> **Teorem 1.14.** *La $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$. Dersom g tilfredsstiller vekstkravet, har vi:*
>
> $$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$$

Bevis. La $s>0$. Vi beregner

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g) &= \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt \\ &= -\frac{1}{s}g(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \\ &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(f). \qquad \square\end{aligned}$$

Eksempel 1.15.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin t) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(\cos t) \\ &= \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}. \qquad \triangle\end{aligned}$$

> **Teorem 1.16.** *La $g(t) = tf(t)$ og $\mathcal{L}(f) = F$. Anta at F er deriverbar. Da har vi:*
>
> $$\mathcal{L}(g) = -F'$$

Bevis. Dersom f er stykkvis kontinuerlig og tilfredsstiller vekstkravet, gjelder dette også for g. Vi beregner

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g) &= \int_0^\infty tf(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty -\frac{d}{ds}f(t)e^{-st}\,dt \\ &= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = -F'. \qquad \square\end{aligned}$$

Eksempel 1.17.

$$\mathcal{L}(t\sin t) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}. \qquad \triangle$$

To spesielle funksjoner

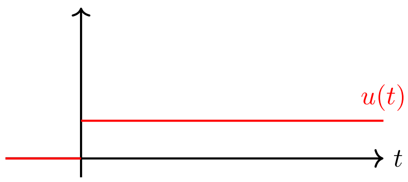
I det følgende skal vi beskrive noen helt nye typer funksjoner som dukker opp i anvendelser.

Heavisidefunksjonen

Heavisidefunksjonen er gitt ved

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0. \end{cases}$$

Man kan tenke på denne som en funksjon som slår noe på ved $t = 0$.

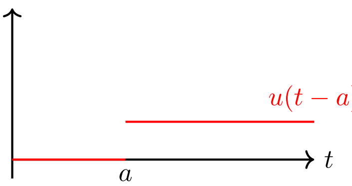


Eksempel 1.18.

$$u(t)e^t = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ e^t & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \qquad \triangle$$

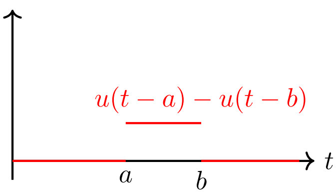
Vi kan slå på ved tiden $t = a$ istedet:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } t \geq a, \end{cases}$$



Vi kan også slå på ved $t = a$ og av igjen ved $t = b$:

$$u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } a \leq t < b \\ 0 & \text{for } t \geq b. \end{cases}$$



Eksempel 1.19.

$$\left(u(t-a) - u(t-b)\right) e^t = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ e^t & \text{for } a \leq t < b \\ 0 & \text{for } t \geq b \end{cases} \qquad \triangle$$

Eksempel 1.20. La $f(t) = u(t-a)$.

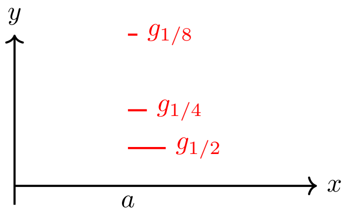
$$\mathcal{L}(f) = \int_a^\infty e^{-st}\, dt = \frac{e^{-sa}}{s} \qquad \triangle$$

Deltafunksjonen

La

$$g_k(t-a) = \begin{cases} 1/k & \text{for } a < t < a+k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Slik ser de ut:



Vi definerer

$$\delta(t) = \lim_{k \to 0} g_k(t) = \begin{cases} \infty & \text{for } t = a \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Deltafunksjonen brukes til å modellere impuls, altså energitilførsler der den påtrykte kraften er ekstremt høy og ekstremt kortvarig, for eksempel hammerslag. Man kan også tenke på den som noe som plukker ut funksjonsverdier:

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t-a)\, dt = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \int_a^{a+k} f(t)\, dt = f(a).$$

Eksempel 1.21.

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}\, dt = e^{-as} \qquad \triangle$$

Deltafunksjonen er strengt tatt ikke noe funksjon i ordets rette forstand, og heavisidefunksjonen er ikke deriverbar. Det kan allikevel være fruktbart å tenke på deltafunksjonen som et forsøk på å sette opp den deriverte til heavisidefunksjonen.

To skifteteoremer

Det neste teoremet kalles gjerne 's-skift'.

Teorem 1.22. *La $g(t) = e^{at}f(t)$, $\mathcal{L}(f) = F$ og $\mathcal{L}(g) = G$. Da har vi*

$$G(s) = F(s-a).$$

Bevis. Dersom $f(t)$ er stykkvis kontinuerlig og tilfredsstiller vekstkravet, gjelder dette også for $e^{at}f(t)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g) &= \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st}\, dt \\ &= \int_0^\infty f(t) e^{at-st}\, dt \\ &= \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t}\, dt = F(s-a). \end{aligned} \qquad \square$$

Eksempel 1.23.

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\sin(t)\right) = \frac{1}{(s-a)^2+1}$$

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\cos(t)\right) = \frac{s-a}{(s-a)^2+1} \qquad \triangle$$

Følgende teorem kalles t-skift.

Teorem 1.24. *La* $g(t) = f(t-a)u(t-a)$, $\mathcal{L}(f) = F$ *og* $\mathcal{L}(g) = G$. *Vi har*

$$G(s) = e^{-as}F(s).$$

Bevis.

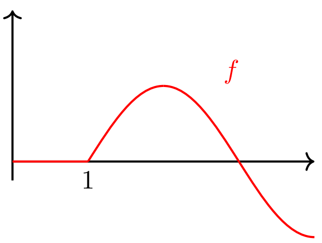
$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty u(t-a)f(t-a)e^{-st}\,dt \\ &= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty f(v)e^{-s(v+a)}\,dv \\ &= e^{-sa}\int_0^\infty f(v)e^{-sv}\,dv = e^{-as}F(s). \end{aligned}$$ □

Eksempel 1.25. La

$$\begin{aligned} f(t) &= u(t-1)\sin(t-1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{for } t < 1 \\ \sin(t-1) & \text{for } t \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vi beregner

$$\mathcal{L}(f) = \frac{e^{-s}}{s^2+1}.$$ △



Konvolusjon

En konvolusjon mellom f og g, er et integral på formen

$$f * g = \int f(p)g(t-p)\,dp.$$

Det finnes mange typer konvolusjoner, og det er forskjellige integrasjonsgrenser som skiller dem. Hvilken type integrasjonsgrenser som er mest relevant, kommer litt an på anvendelsen.

I dette kapitlet skal vi bruke konvolusjonen

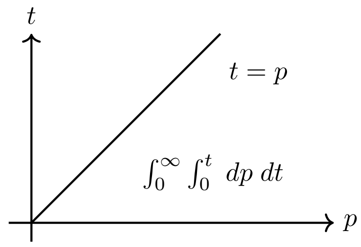
$$f * g = \int_0^t f(p)g(t-p)\,dp$$

Når vi løser differensiallikninger med laplacetransform, kan vi støte på produkter av laplacetransformer. Følgende teorem, som kalles konvolusjonsteoremet, forteller oss hvordan vi skal nøste opp i et slikt produkt.

Teorem 1.26. *Anta at både* $\mathcal{L}(f * g)$, $\mathcal{L}(f)$ *og* $\mathcal{L}(g)$ *eksisterer. Da er*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g).$$

Bevis. Vi laplacetransformerer $f * g$ og bytter integrasjonsvariable, slik som i M2. Hjelpefiguren under kan være grei å ha i bakhodet.



$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g) &= \int_0^\infty \int_0^t f(p)g(t-p)\,dp\; e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \int_p^\infty f(p)g(t-p)e^{-st}\,dt\,dp \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(p)g(u)e^{-s(u+p)}\,du\,dp \\ &= \int_0^\infty f(p)e^{-sp}\,dp \int_0^\infty g(u)e^{-su}\,du \\ &= \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) \end{aligned}$$ □

Å forklare hva konvolusjon er sånn rent fysisk sett, er ikke så enkelt. Men mange artige ting er basert på konvolusjon. Noen eksempler er reverb-knappen på gitarforsterkeren din, bakgrunnsuskarpheten i det vakre konfirmasjonsbildet ditt, eller autofokusfunksjonen på speilreflekskameraet du fikk til ovennevnte konfirmasjon.

Differensiallikninger

Oppskriften for å løse differensiallikninger med laplacetransform, er alltid å laplacetransformere hele differensiallikningen, bruke regnereglene, løse for laplacetransformen til den ukjente, og inverstransformere. Vi begynner med to elementære eksempler.

Eksempel 1.27.

$$y' + y = 0 \qquad y(0) = 1.$$

Vi laplacetransformerer likningen. Venstresiden blir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y' + y) &= \mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(y) \\ &= s\mathcal{L}(y) - 1 + \mathcal{L}(y) \\ &= (s+1)\mathcal{L}(y) - 1. \end{aligned}$$

Merk bruken av initialbetingelsen $y(0) = 1$. Høyresiden blir

$$\mathcal{L}(0) = 0.$$

Etter laplacetransformering står vi igjen med den algebraiske likningen

$$(s+1)\mathcal{L}(y) - 1 = 0,$$

slik at

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s+1}.$$

Dette er en laplacetransform vi har beregnet tidligere:

$$y(t) = e^{-t}.$$ △

Eksempel 1.28. Vi løser likningen

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = 1\; y'(0) = 0.$$

Vi laplacetransformerer likningen

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = s^2\mathcal{L}(y) - s + \mathcal{L}(y) = 0,$$

slik at

$$\mathcal{L}(y) = \frac{s}{s^2+1},$$

og

$$y(t) = \cos t. \qquad \triangle$$

Følgende eksempel illustrerer derivasjonsregelen 1.16.

Eksempel 1.29. Vi løser initialverdiproblemet

$$ty' - 2y = 0 \quad y(0) = 0$$

Vi laplacetransformerer likningen

$$\mathcal{L}(ty') - 2\mathcal{L}(y) = 0,$$

og lar $Y = \mathcal{L}(y)$. Først kan vi skrive

$$\mathcal{L}(ty') = -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}(y')\right) = -\frac{d}{ds}(sY) = -Y - sY'.$$

Setter vi denne inn i likningen, får vi

$$-Y - sY' - Y = -sY' - 3Y = 0.$$

eller

$$sY' + 3Y = 0.$$

Dette er en differensialliking for Y. Integrerende faktor er s^2, slik at

$$(s^3Y)' = 0.$$

og

$$Y = \frac{C}{s^3}$$

Vi inverstransformerer og endrer litt på konstanten:

$$y = Ct^2$$

og bruker initialverdibetingelsen for andre gang:

$$y = t^2. \qquad \triangle$$

De tre foregående eksemplene løses enklere med metodene du kan fra før. Men disse teknikkene kommer til kort i eksemplene vi skal ta nå. Her er et par gamle eksamensoppgaver.

Eksempel 1.30. Vi løser

$$y'' + y = \delta(t-a) - \delta(t-b)$$

med initialbetingelser

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Vi får

$$(s^2+1)\mathcal{L}(y) = e^{-as} - e^{-bs},$$

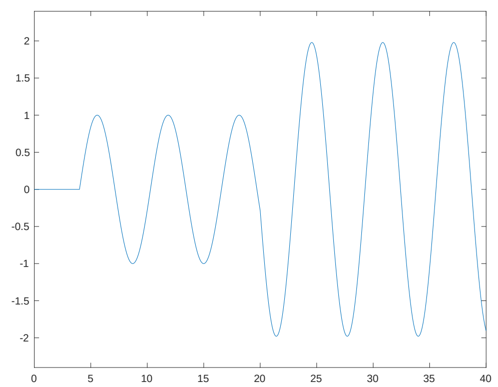
slik at

$$\mathcal{L}(y) = \frac{e^{-as}}{(s^2+1)} - \frac{e^{-bs}}{(s^2+1)}.$$

Vi bruker t-skift, og får

$$y(t) = \sin(t-a)u(t-a) - \sin(t-b)u(t-b).$$

Ligningens venstreside beskriver en kloss og en fjær på friksjonsfritt underlag. Ved tiden $t = 0$ er systemet i ro. Ved tiden $t = a$ blir klossen dengt av en hammer fra venstre, som gir opphav til svingningen $\sin(t-a)$. Ved tiden $t = b$ blir klossen dengt av en hammer fra høyre. Dette slaget gir en ny svingning $\sin(t-b)$ som legges oppå den gamle svingningen. $\triangle$



Noen ganger kan det være komplisert å inverstransformere. I det neste eksemplet må man bruke både t-skift og s-skift.

Eksempel 1.31.

$$y'' + 2y' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Vi transformerer ligningen til

$$s^2\mathcal{L}(y) + 2s\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\delta(t-1))$$

slik at

$$\mathcal{L}(y) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}.$$

Her lukter det s-skift på grunn av $(s+1)$, og t-skift på grunn av e^{-s}. Formelen for s-skift gir

$$\mathcal{L}(te^{-t}) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Vi bruker i tillegg t-skift, slik at

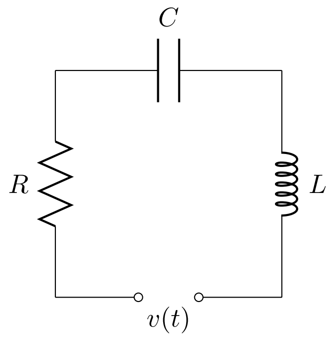
$$y = (t-1)e^{-(t-1)}u(t-1). \qquad \triangle$$

Elektrofolk er forresten veldig glade i laplacetransform. Det er nok fordi de trenger spenning som kan slås av og på. Heavisidefunksjonen gir dem en mulighet for dette, og laplacetransform takler heavisidefunksjonen med letthet.

Eksempel 1.32. Strømmen $i(t)$ i kretsen under tilfredsstiller integro-differensialligningen

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \delta(t-1),$$

der $R = 2$, $L = 1$, $C = 0.5$ og δ er Diracs deltafunksjon. Vi setter $i(0) = 0$ og finner strømmen $i(t)$.



Vi laplacetransformerer likningen, og får

$$s\mathcal{L}(i) + 2\mathcal{L}(i) + \frac{2}{s}\mathcal{L}(i) = e^{-s},$$

og løser vi for $\mathcal{L}(i)$, får vi

$$\mathcal{L}(i) = \frac{se^{-s}}{s^2+2s+2}.$$

Her er det enklest å fullføre kvadratet $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$, og så skrive

$$\mathcal{L}(i) = \frac{(s+1)e^{-s}}{(s+1)^2+1} - \frac{e^{-s}}{(s+1)^2+1}.$$

Formelen for s-skift gir

$$\mathcal{L}(e^{-t}\cos t) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

og

$$\mathcal{L}(e^{-t}\sin t) = \frac{1}{(s+1)^2+1}.$$

Inverstransformerer vi

$$\mathcal{L}(i) = \frac{(s+1)e^{-s}}{(s+1)^2+1} - \frac{e^{-s}}{(s+1)^2+1}.$$

med t-skift, får vi altså

$$i(t) = e^{-(t-1)}u(t-1)\left(\cos(t-1) - \sin(t-1)\right).$$

Dette eksemplet modellerer en fugl som ved tiden $t = 1$ setter seg på en høyspentledning. Merk at strømmen er null frem til $t = 1$. I $t = 1$ opplever fuglen en voldsom påtrykt spenning i det den setter seg på høyspenten. Den faller umiddelbart av, slik at spenningsøkningen bare varer et kort øyeblikk. For $t > 1$ beskriver i strømmen i fuglens kropp mens den daler ned mot bakken. Se figuren under.

I denne oppgaven kunne vi også brukt delbrøksoppspaltning:

$$\frac{s}{s^2+2s+2} = \frac{s}{(s-1-i)(s-1+i)}$$

men regningen blir noe svineri. △

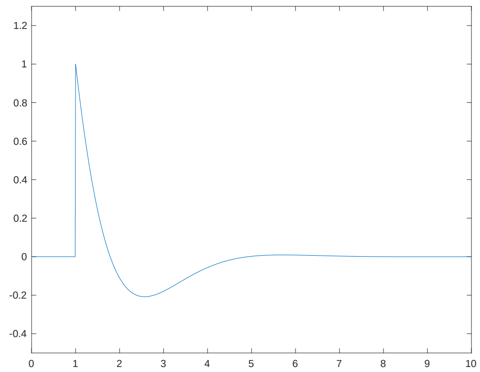
Nå tar vi to eksempler der vi bruker konvolusjon.

Eksempel 1.33. Vi løser initialverdiproblemet

$$y + t * y' = t \quad y(0) = 0$$

Vi laplacetransformerer

$$\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(t * y') = \frac{1}{s^2}$$



og bruker konvolusjonsteoremet

$$\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(t)\mathcal{L}(y') = \mathcal{L}(y) + \frac{1}{s}\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2}$$

eller

$$s\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s}$$

Herfra er regningen standard, og vi får

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1},$$

slik at

$$y = 1 - e^{-t}.$$

△

Eksempel 1.34. La oss løse initialverdiproblemet

$$y'' + y = \sin t \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

Vi laplacetransformerer alt, og får

$$(s^2+1)\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2+1}$$

eller

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = \left(\mathcal{L}(\sin t)\right)^2$$

som gir at

$$y(t) = \int_0^t \sin(t-u)\sin u\, du$$

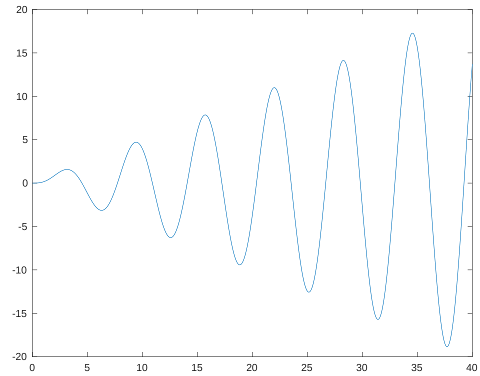
Dette siste integralet kan vi løse ved å bruke relasjonen

$$\sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$$

og integrere i vei

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t \sin(t-u)\sin u\, du \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^t (e^{i(t-u)} - e^{-i(t-u)})(e^{iu} - e^{-iu})\, du \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^t e^{it} - e^{i(t-2u)} - e^{-i(t-2u)} + e^{-it}\, du \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^t \cos t - \cos(t-2u)\, du \\
&= \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)
\end{aligned}$$

Dette eksemplet beskriver for eksempel en kloss og en fjær, der den påtrykte kraften $\sin t$ har samme frekvens som systemets naturlige svingefrekvens. Da oppstår det resonans. Resonansen kommer til uttrykk gjennom leddet $t \sin t$, som vokser mot uendelig når $t \to \infty$. Når dette skjer i et PA-anlegg, kalles det feedback, og alle må holde seg for ørene. △



Eksemplet over viser at selv om det er litt regning med laplacetransform, er det en penere løsningsmetode enn å dele opp i homogen og partikulær løsning, og så gjette i vei. Eksemplet illustrerer også en teknikk vi får bruk for når vi skal løse varmelikningen på hele x-aksen i kapittel 5.