3 Fouriertransform

Fouriertransform er egentlig et spesialtilfelle av laplacetransform, men vi kommer ikke til å komme så langt at vi ser det. Fourierrekker og fouriertransform er også to spesialtilfeller av en mer generell konstruksjon, men vi kommer ikke til å se det heller.

Vi skal senere bruke fouriertransform til å løse differensiallikninger på akkurat samme måte som vi gjorde med laplacetransform, men fouriertransform er teknisk vanskeligere å håndtere, og vi skal løse likninger som er mer kompliserte. I dette kapitlet skal vi gå gjennom fouriertransformens grunnleggende egenskaper.

Definisjon og grunnleggende egenskaper

Definisjon. Fouriertransformen til f er

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx = \hat{f}(w),$$

der w er en reell variabel.

Akkurat som med laplacetransform, må vi ta stilling til hvilke funksjoner det er naturlig å ta fouriertransform til. Siden

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

ser vi at det gir ingen mening å stappe inn en funksjon som ikke lar seg integrere på hele x-aksen. Det er vanlig å kreve at f er absolutt integrerbar, altså at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Å bevise noe ordentlig i dette kapitlet er vanskelig, men det er ikke så vanskelig å se at man ihvertfall kan beregne fouriertransformen for absolutt integrerbare funksjoner.

Teorem 3.1. *Dersom f er absolutt integrerbar, konvergerer integralet*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx.$$

absolutt.

Bevis. Dersom w og x er reelle, er $|e^{-iwx}| = 1$, slik at

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-iwx}|\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot |e^{-iwx}|\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty. \qquad \square\end{aligned}$$

Eksempel 3.2. La $a > 0$. Vi beregner

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-a|x|}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-iwx}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-iwx}\, dx + \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-iwx}\, dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{0}^{\infty} e^{-x(a+iw)}\, dx + \int_{-\infty}^{0} e^{x(a-iw)}\, dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a+iw} + \frac{1}{a-iw} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2+w^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+w^2} \qquad \triangle\end{aligned}$$

Motivasjon - relasjon til fourierrekker

Man kan tenke at fouriertransform er en slags fourierrekke der $[-L, L]$ strekkes til å bli hele x-aksen. La f være en kontinuerlig og absolutt integrerbar funksjon. Vi setter opp fourierrekken til f på intervallet $(-L, L)$, og gjør en omskrivning:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(y) e^{-i\frac{n\pi}{L}y}\, dy \right) e^{i\frac{n\pi x}{L}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{L} \int_{-L}^{L} f(y) e^{-i\frac{n\pi}{L}y}\, dy \right) e^{i\frac{n\pi x}{L}}.\end{aligned}$$

Det siste uttrykket kan tolkes som en riemannsum på aksen der n telles fra $-\infty$ til ∞. Gitteravstanden er $\frac{\pi}{L}$, og punktene er gitt ved $\frac{n\pi}{L}$. Hvis vi lar $L \to \infty$, vifter vi det vi kan med armer og bein og får

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iwy}\, dy \right) e^{iwx}\, dw.$$

Vi kjenner igjen det innerste integralet som fouriertransformen til f:

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx.$$

Det ytterste integralet kalles den inverse fouriertransformen, og vi skriver

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{iwx}\, dw.$$

Det finnes en inversformel for fouriertransform. Å redegjøre ordentlig for når formelen fungerer, er altfor vanskelig for oss, men vi kan skrive den opp.

Teorem 3.3. *Hvis f er glatt, og alle deriverte synker raskt nok når $|x| \to \infty$, er det riktig at*

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx}\, dw.$$

I motsetning til laplacetransform har vi tilgang på en formel for den inverse transform. Men det er allikevel vanlig å finne invers fouriertransform ved å slå opp i en tabell.

Regneregler

Her er noen regneregler.

> **Teorem 3.4.** *Dersom a og b er relle tall, og f og g er funksjoner, er*
> $$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

> **Teorem 3.5.** *Hvis f er glatt, og alle deriverte synker raskt nok når $|x| \to \infty$, er*
> $$\mathcal{F}(f') = iw\mathcal{F}(f).$$

Bevis. Vi tar en delvis integrasjon, og regner ut

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f') =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx}\,dx \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{-iwx}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{iw}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx \\
=& iw\mathcal{F}(f).
\end{aligned}$$

□

Eksempel 3.6. Vi beregner

$$\mathcal{F}(e^{-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-iwx}\,dx$$

Dette er litt jobb. Derivasjonsregelen over gir

$$\mathcal{F}(-2xe^{-x^2}) = iw\mathcal{F}(e^{-x^2}).$$

Men vi kan også observere at

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(-2xe^{-x^2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -2xe^{-x^2}e^{-iwx}\,dx \\
&= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ixe^{-x^2}e^{-iwx}\,dx \\
&= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\frac{d}{dw}e^{-iwx}\,dx \\
&= -2i\frac{d}{dw}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-iwx}\,dx \\
&= -2i\frac{d}{dw}\mathcal{F}(e^{-x^2}).
\end{aligned}$$

Hvis vi setter disse uttrykkene lik hverandre, får vi differensiallikningen

$$iw\mathcal{F}(e^{-x^2}) = -2i\frac{d}{dw}\mathcal{F}(e^{-x^2})$$

eller

$$\frac{d}{dw}\mathcal{F}(e^{-x^2}) + \frac{w}{2}\mathcal{F}(e^{-x^2}) = 0$$

for $\mathcal{F}(e^{-x^2})$. Integrerende faktor er

$$e^{w^2/4},$$

slik at

$$\frac{d}{dw}\left(e^{w^2/4}\mathcal{F}(e^{-x^2})\right) = 0$$

eller

$$\mathcal{F}(e^{-x^2}) = Ce^{-w^2/4}.$$

Husk fra nøtten i øving 2 at

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

slik at

$$\mathcal{F}(e^{-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-w^2/4}.$$

Dersom $a > 0$, kan vi gjøre den samme beregningen og få

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-w^2/4a}.$$

△

Konvolusjon

Konvolusjon kommer i mange former. I dette kapitlet definerer vi kovolusjon mellom to funksjoner f og g som

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(x-v)\,dv.$$

> **Teorem 3.7.** *Hvis f er glatt, og alle deriverte synker raskt nok når $|x| \to \infty$, er*
> $$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g).$$

Bevis. Vi bruker varablelskiftet $u = x - v$, $v = v$, og beregner

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(x-v)\,dv\; e^{-iwx}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(x-v)\; e^{-iwx}\,dv\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(u)\; e^{-iw(u+v)}\,dv\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-iwu} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\; e^{-iwv}\,dv\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-iwu}\;\mathcal{F}(f)\,du \\
&= \mathcal{F}(f)\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-iwu}\,du \\
&= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)
\end{aligned}$$

□

Konvolusjon kan fremstå som noe umotivert. Men grunnen til at vi trenger det, er veldig enkel. Vi skal løse differensiallikninger med fouriertransform, og da vil vi få bruk for å inverstransformere produkter av fouriertransformer. Konvolusjonsteoremet forteller oss nøyaktig hvordan vi inverstransformerer et slikt produkt.