

Hva om du ønsker å finne stigningen til en funksjon som er tabulert? Vi skal gå gjennom en sentral teknikk for numerisk derivasjon som kalles *endelige differanser*. Det er to grunner til dette: for det første trenger vi det for å lage numeriske skjema for differensiallikninger, og for det andre gir det en fryktelig transparent illustrasjon av dette med feil.

### Skanter og tangenter

I M1 definerte vi den deriverte til en funksjon  $f$  som

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Uttrykket

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

er stigningstallet til sekanten til  $f$  mellom punktene  $x$  og  $x+h$ . For små  $h$  er denne sekanten en grei tilnærming til stigningstallet  $f'(x)$ :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

På papiret er det slik at jo mindre  $h$ , desto bedre tilnærming.

**Eksempel 8.1.** La  $f(x) = e^x$ , og la  $h = 0.1$ . Vi beregner

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.6} - e^{1.5}}{0.1} = 4.7134.$$

Merk at

$$f'(1.5) = e^{1.5} = 4.4817,$$

så denne tilnærmingen bommer med rundt  $2 \cdot 10^{-1}$ . Vi kan også prøve  $h = 0.01$ . Da får vi

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.51} - e^{1.5}}{0.01} = 4.5042.$$

som er noe bedre, nå er feilen på rundt  $2 \cdot 10^{-2}$ . Vi knekker til med enda en:

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.501} - e^{1.5}}{0.001} = 4.4839,$$

og får en feil på rundt  $2 \cdot 10^{-3}$ . △

**Merk.** Feilen i forrige eksempel er tydelig proporsjonal med  $h$  - deler du  $h$  på 10, deler du feilen på 10. En god illustrasjon av lineær feil.

### Taylorutvikling

I M1 lærte du også taylorutvikling. Anta  $f$  er analytisk funksjon. Det går an å utlede formelen

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

ved å bruke taylorutviklingen til  $f$  i punktet  $x$ :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \dots$$

Stigningen til sekanten kan skrives

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + \dots$$

og vi ser at dette stigningstallet består av den eksakte verdien for  $f'(x)$  pluss resten av taylorrekken til  $f$

$$\frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{6}h^2 + \dots$$

Denne halen forteller oss noe om feilen. Dersom  $h$  er liten nok, vil  $h$  være mye mindre enn  $h^2$ , og vi skriver

$$\frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{6}h^2 + \dots = O(h)$$

for å signalisere at feilen er proporsjonal med  $h$ .

### Høyere ordens tilnærminger

Vi kan relativt lett forbedre den lineære tilnærmingen fra forrige avsnitt ved å skrive

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \dots$$

og sette opp tilnærmingen

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \frac{f^{(5)}(x)}{5!}h^4 + \dots$$

Feilen i denne tilnærmingen er

$$\frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \frac{f^{(5)}(x)}{5!}h^4 + \dots$$

Hvis  $h$  er liten, er det rimelig å anta denne feilen er mye mindre enn for den første tilnærmingen, siden  $h^2 \ll h$ .

**Eksempel 8.2.** La  $f(x) = e^x$ , og la  $h = 0.1$ . Vi beregner

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.6} - e^{1.4}}{0.2} = 4.489162287752202,$$

som gir en feil på rundt  $7.5 \cdot 10^{-3}$ . Mye bedre enn i sted. Vi kan prøver også  $h = 0.01$ :

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.51} - e^{1.49}}{0.02} = 4.481763765529401$$

som er noe bedre, nå er feilen på rundt  $7.5 \cdot 10^{-5}$ . Knekker vi til med  $h = 0.001$ , får vi

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.501} - e^{1.499}}{0.002} = 4.481689817286139$$

som gir en feil på  $7.5 \cdot 10^{-7}$ . △

**Merk.** Legg merke til hvordan feilen i forrige eksempel er nærmest perfekt kvadratisk - vi får to nye desimaler hver gang vi deler  $h$  på 10. Feilen deles altså på 100 når  $h$  deles på 10.

Hvis du virkelig vil slå på stortrommen, kan du bruke formelen

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$$

**Eksempel 8.3.** Vi bruker den store formelen med  $h = 0.1$ ,  $h = 0.01$  og  $h = 0.001$ . Då får vi feil på  $10^{-5}$ ,  $10^{-9}$ , og  $10^{-13}$ . Fire nye desimaler hver gang  $h$  deles på 10. Prøv selv. △

## Konsistens

### Høyere ordens deriverte

Dersom du trenger en tilnærming for  $f''(x)$ , kan du bruke den andre ordens sentraldifferansen

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + O(h^2)$$

Nå bør det etterhvert være klart hvordan en slik derivasjonsformel konstrueres - man søker en lineærkombinasjon av funksjonsverdier  $f(x)$ ,  $f(x-h)$  og  $f(x+h)$  og lignende ledd, for å oppnå to ting:

- Korrekt tilnærming av den  $n$ -te deriverte.
- Så høy orden som mulig.

### Richardsonekstrapolasjon

Det går an å kombinere tilnærminger av forskjellig orden til å oppnå høyere ordens tilnærminger. Vi definerer

$$\phi(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Da har vi at

$$\phi(h) = f'(x) + h^2 \frac{f'''(x)}{6} + h^4 \frac{f^5(x)}{120} + \dots$$

og

$$\phi\left(\frac{h}{2}\right) = f'(x) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{f'''(x)}{6} + \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{f^5(x)}{120} + \dots$$

Her er trikset.

$$\frac{4\phi\left(\frac{h}{2}\right) - \phi(h)}{3} = f'(x) - \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{f^5(x)}{480} + \dots$$

Med andre ord: den rette lineærkombinasjonen av to estimater med forskjellige gitterfinheter kan få et (eller flere) ledd i feilutviklingen til å forsvinne, og da får vi en høyere ordens tilnærming.

**Eksempel 8.4.** Hvis vi setter  $h = 0.1$ , og tar to tidligere approksimasjoner,

$$\phi(0.1) = \frac{e^{1.6} - e^{1.4}}{0.2} = 4.489162287752202,$$

med en feil på rundt  $7.5 \cdot 10^{-3}$ , og

$$\phi(0.01) = \frac{e^{1.51} - e^{1.49}}{0.02} = 4.481763765529401$$

med en feil på rundt  $7.5 \cdot 10^{-5}$ , og og kombinerer dem, får vi

$$\frac{100\phi\left(\frac{h}{2}\right) - \phi(h)}{99} = 4.481689032981695$$

som gir en feil på  $-3.73 \cdot 10^{-8} \approx \left(\frac{h}{10}\right)^4$ .  $\triangle$

Det går an å formulere presise teoremer som forteller hvordan man skal lineærkombinere tilnærminger til høyere ordens tilnærminger, men vi nøyer oss med denne lille smakebiten.

## Interpolasjon

Alle formlene i dette kapitlet kan også utledes ved å interpolere med forskjellige polynomer i  $f(x)$ ,  $f(x-h)$  og  $f(x+h)$  osv, og så derivere interpolasjonspolynomene. Dette er en noe mer klønete måte å utlede derivasjonsformlene på, så vi bare nevner det i forbi-farten. Vi koster på oss en illustrasjon ved å utlede sentraldifferansen for  $f'$ . Vi setter opp lagrangepolynomene i  $x-h$  og  $x+h$ :

$$p(y) = f(x-h) \frac{y - (x+h)}{2h} - f(x+h) \frac{y - (x-h)}{2h},$$

og beregner

$$f'(x) \approx p'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$