

Vi skal lage numeriske metoder for å finne tilnærmede løsninger for initialverdi problemet

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0.$$

Dette er et kjempetiltak. Vi har bare tid til å skrape så vidt i overflaten, men vi skal prøve å belyse et par momenter.

Runge-Kutta-metoder

En numerisk metode for ordinære differensiallikninger starter med følgende to observasjoner:

- Vi vet hva den analytiske løsningen er i x_0 . Dette vet vi på grunn av initialkravet $y(x_0) = y_0$.
- Vi vet hvilket stigningstall den analytiske løsningen har i x_0 , for evaluerer vi differensiallikningen i x_0 , får vi $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

La oss lage oss et punkt x_1 litt ut fra x_0 , med avstand $h = x_1 - x_0$. Siden vi har funksjonsverdien og stigningstallet til y i x_0 , kan vi bruke lineær tilnærming, og gjette på $y(x_1)$:

$$y(x_1) \approx y(x_0) + hy'(x_0) = y(x_0) + hf(x_0, y_0).$$

Nå definerer vi $y_1 = y(x_0) + hf(x_0, y_0) \approx y(x_1)$. Dette er den tilnærmede verdien til y i x_1 . Vi tar den for god fisk, lager oss et nytt punkt $x_2 = x_1 + h$, og beregner

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

som er en tilnærming $y_2 \approx y(x_2)$. Nå fortsetter vi i samme stilen, girtror opp intervallet vi skal løse likningen på med gitterfinhet h , slik at punktene er gitt ved $x_i = ih$. Tilnærmingen til $y(x_i)$ kaller vi y_i , og metoden kalles *Eulers eksplisitte metode*:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

Metoden kalles *eksplisitt*, siden likningen kommer ferdig løst for y_{i+1} .

Vi skriver nå opp et par andre varianter. Alle er basert på å bytte ut stigningen $f(x_i, y_i)$ med et eller annet estimat. Setter vi inn $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ istedet for $f(x_i, y_i)$, får vi *Eulers implisitte metode*:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}),$$

og bytter vi ut med $\frac{1}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$, får vi *trapesmetoden*:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})).$$

Disse to metodene kalles *implisitte* fordi likningene ikke er ferdig løst for y_{i+1} . Noen ganger er det lett å finne y_{i+1} , andre ganger ikke.

Hvis vi bytter ut $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ i trapesmetoden med en tilnærming basert på et eksplisitt eulersteg, får vi den eksplisitte *Heuns metode*:

$$y_i^* = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i^*)),$$

og hvis vi klinker til og bytter ut tilnærmingen til stigningstallet med følgende avanserte opplegg, får vi nok en eksplisitt variant, nemlig Runge-Kuttas klassiske fjerdeordens metode, populært kalt RK4:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Dette er alle metodene vi skal analysere, og alle er eksempler på *Runge-Kutta-metoder*. Nå lur du sikkert på hvorfor man har så mange forskjellige metoder, og det korte svaret er som ellers i anvendt matematikk: noen metoder eksisterer fordi de er lette å finne opp og forstå, mens andre metoder finnes fordi de er skikkelig bra.

Eksempel 10.1. Vi løser initialverdi problemet

$$y' = -y \quad y(0) = 1$$

med Eulers eksplisitte metode på intervallet $[0, 1]$. Siden $f(x, y) = -y$, blir metoden

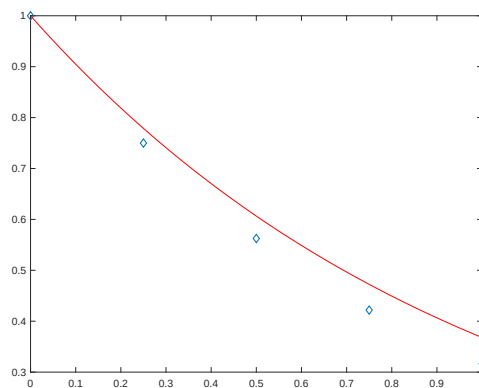
$$y_{i+1} = y_i - hy_i = (1 - h)y_i$$

med

$$y_0 = 1.$$

Løsning for $h = 0.25$ gir figuren under. De blå diamantene er y_1, y_2, y_3, y_4 og y_5 , mens den røde kurven er den analytiske løsningen $y = e^{-x}$. Vi beregner $y(1) = 1/e \approx 0.367879441171442$, som kan sammenliknes med $y_5 = 0.31640625$:

$$y_5 - y(1) = -0.051473191171442. \quad \triangle$$



Eksempel 10.2. Vi løser samme problem som i sted med Eulers implisitte metode. Metoden blir

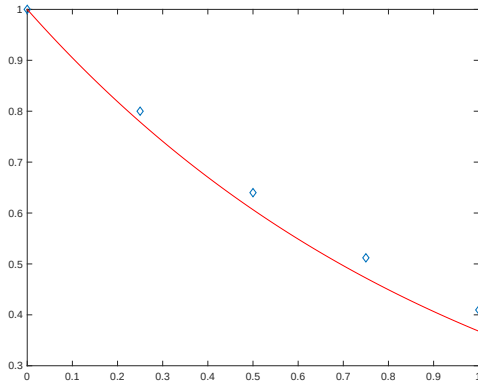
$$y_{i+1} = y_i - hy_{i+1},$$

som vi løser for y_{i+1} , og får

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{(1+h)}.$$

Figur under for $h = 0.5$. Vi får $y_5 = 0.4096$, og

$$y_5 - y(1) = 0.041720558828558. \quad \triangle$$



Eksempel 10.3. Trapesmetoden:

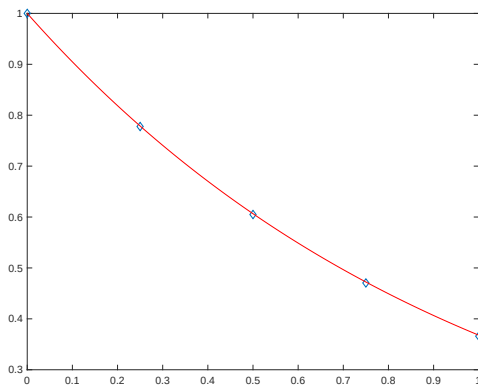
$$y_{i+1} = y_i - \frac{1}{2}h(y_i + y_{i+1}).$$

Vi løser for y_{i+1} , og får

$$y_{i+1} = \frac{2+h}{2-h}y_i.$$

Denne treffer noe bedre:

$$y_5 - y(1) = -0.001929128719072. \quad \triangle$$



Eksempel 10.4. Heuns metode:

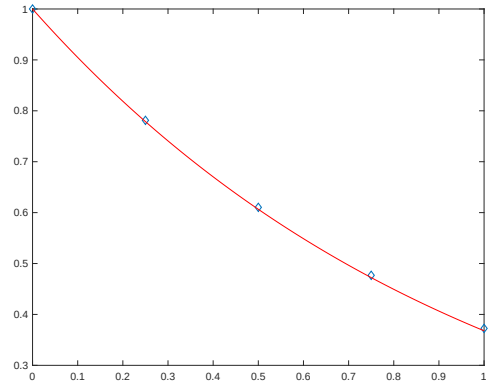
$$y_i^* = y_i - hy_i$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{1}{2}h(y_i + y_i^*)$$

og

$$y_5 - y(1) = 0.004649588674749.$$

Bedre enn Euler, men ikke helt trapesmetoden. $\triangle$



Eksempel 10.5. Til slutt RK4:

$$k_1 = -y_i$$

$$k_2 = -\left(y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = -\left(y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

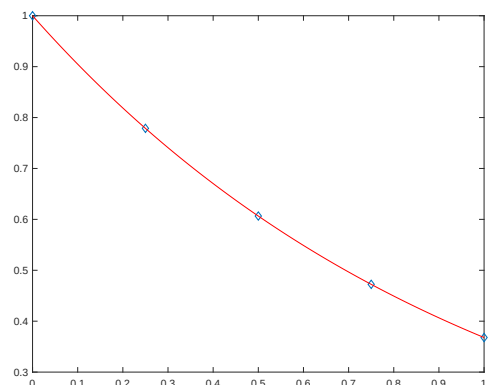
$$k_4 = -(y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Denne treffer ganske bra:

$$y_5 - y(1) = 1.475823530627807e - 05.$$

Noe må den ha igjen for å være så komplisert. $\triangle$



Utleddningsmetoder

I forrige avsnitt utledet vi Eulers eksplisitte metode. For å sette disse metodene i kontekst med tidligere pensum i kurset, og for å indikere hvordan man kan lage flere metoder, skal vi utlede noen av dem med kjente metoder for numerisk integrasjon og derivasjon.

En uledningsteknikk er å gitte opp med $h = x_{i+1} - x_i$, integrere differensiallikningen

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) - y(x_i) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx, \end{aligned}$$

bruke $y_{i+1} - y_i \approx y(x_{i+1}) - y(x_i)$ på venstre side, og tilnærme integralet

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx,$$

med en kvadraturregel. Gjør man den særdeles enkle tilnærmingen

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i) dx = hf(x_i, y_i),$$

får man eksplisitt Euler, og velger man den tilsvarende enkle tilnærmingen

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \approx hf(x_{i+1}, y_{i+1}),$$

får man Eulers implisitte metode. Trapesregelen

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \approx \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

gir trapesmetoden

$$y_{i+1} = y(x_i) + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})).$$

Tilnærmer man trapesregelen med formelen

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \approx \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*))$$

der $y_{i+1}^* = y_i + hf(x_i, y_i)$ er et eksplisitt eulersteg, får man Heuns metode. Bruker man tilnærmingen

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \approx hf\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)$$

får man *midtpunktmotoden*.

RK4 er avledet fra Simpsons metode. Tilnærmer man

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx,$$

med Simpson, får man en implisitt metode som ikke er pensum, og bytter man ut de implisitte verdiene leddene i denne metoden med forskjellige estimer basert på eksplisitt Euler, får man RK4, litt som Heuns metode er avledet fra trapesmetoden.

Metodene vi har utledet til nå, kalles *enstegsmetoder*, for kun y_{i+1} og y_i figurerer i likningene. Grunnen til at alle metodene er på denne formen, er at det

kun er brukt en type endelig differansetilnærming på venstre side av

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

nemlig den første ordens differansen

$$y'(x_{i+1}) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

Nå er det ingenting i veien for å bruke en høyere ordens tilnærming, for eksempel sentralt differansen

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}.$$

Setter man denne inn for y' , får man *leap-frog-metoden*

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i).$$

Her inngår både y_{i+1} , y_i og y_{i-1} , og leap-frog er et eksempel på en *flerstegsmetode*. Flerstegsmetoder er ikke pensum i dette kurset.

Feilanalyse

I dette avsnittet skal vi ta en titt på hvorfor metodene treffer så forskjellig. Vi skal indikere hvordan analysen får for eksplisitt Euler, og så skrive opp resultatet for de andre metodene.

Lineariseringen som gir det første eulersteget er

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0 + h) \\ &\approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) \\ &= y(x_0) + hy'(x_0). \end{aligned}$$

Vi antar at y er en analytisk funksjon, og taylorutvikler:

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0 + h) \\ &= y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}h^2 + \dots \end{aligned}$$

Sammenlikner vi denne med

$$y_1 = y(x_0) + hy'(x_0),$$

ser vi at feilen i det første eulersteget er gitt ved

$$y(x_1) - y_1 = \frac{y''(x_0)}{2}h^2 + \frac{y'''(x_0)}{6}h^3 + \dots$$

altså taylorrekkehalen til y . Hvis vi antar at h er liten, slik at h^2 er mye større enn h^3 , og leddet

$$\frac{y''(x_0)}{2}h^2$$

dominerer halen på taylorrekken, er det ikke urimelig å hevde at eksplisitt Euler har *lokal feil* av størrelsesorden h^2 .

Feilen etter ett steg er altså av størrelsesorden h^2 . Men hva er feilen etter n steg? I eksemplene i forrige avsnitt, kjørte vi løserne på intervallet $[0, 1]$. La oss si at vi kjører på intervallet $[x_0, x_0 + a]$. Vi velger h slik at

$$x_n = x_0 + hn = x_0 + a$$

og

$$n = \frac{a}{h}.$$

Hvis vi nå gjør n steg med eksplisitt Euler, samler vi i hvert steg opp en lokal feil omtrent lik

$$\frac{y''(x_i)}{2}h^2.$$

Feilen etter n steg blir

$$\sum_{i=1}^n \frac{y''(x_i)}{2}h^2,$$

og hvis vi antar at $y'' \leq M$ på $[x_0, x_0 + a]$, er det rimelig å hevde at

$$\sum_{i=1}^n \frac{y''(x_i)}{2}h^2 \leq Mnh^2 = M\frac{a}{h}h^2 = Mah.$$

Vi sier derfor at eulers metode har *global feil* av størrelsesorden h .

Teorem 10.6. Lokal og global feil for metodene:

Metode	Lokal feil	Global feil
Eksplisitt Euler	h^2	h
Implisitt Euler	h^2	h
Trapesmetoden	h^3	h^2
Heuns metode	h^3	h^2
RK4	h^5	h^4

Vi skal ikke bevise dette teoremet, men nevner at bevisteknikken er den samme for alle metodene: Taylor-utvikle om x_0 for å finne lokal feil, og så se på hva som skjer etter n steg. Dette teoremet forklarer langt på vei hva som skjedde i eksemplene i forrige avsnitt. Nå tar vi et par eksempler der vi lar $h \rightarrow 0$.

Eksempel 10.7. Vi kjører samme eksempel som i forrige avsnitt, men nå bruker vi Eulers eksplisitte metode for $h = 0.1$, $h = 0.01$ og så videre. Resultatene er oppsummert i følgende tabell:

h	$y_n - y(1)$
10^{-1}	$-1.920100107144218e - 02$
10^{-2}	$-1.847099898213078e - 03$
10^{-3}	$-1.840164004788258e - 04$
10^{-4}	$-1.839473847314865e - 05$
10^{-5}	$-1.839403194148215e - 06$

Dette eksemplet demonstrerer tydelig at feilen etter n steg er proporsjonal med h . På folkemunne sier man gjerne at man får en ekstra korrekt desimal hver gang man tideler h . Eulers implisitte metode oppfører seg omtrent likt, så den hopper vi over. $\triangle$

Eksempel 10.8. Trapesmetoden for $h = 0.1$, $h = 0.01$ og så videre:

h	$y_n - y(1)$
10^{-1}	$-3.068987885734287e - 04$
10^{-2}	$-3.065695217463471e - 06$
10^{-3}	$-3.065658332745969e - 08$
10^{-4}	$-3.069314802317535e - 10$
10^{-5}	$-5.472844399889709e - 12$

Her er feilen etter n steg proporsjonal med h^2 . På folkemunne sier man gjerne at man får to desimaler hver gang man tideler h . Heuns metode produserer omtrent den samme tabellen. $\triangle$

Eksempel 10.9. RK4:

h	$y_n - y(1)$
10^{-1}	$3.332410560830112e - 07$
10^{-2}	$3.091293887536040e - 11$
10^{-3}	$3.996802888650564e - 15$
10^{-4}	$2.664535259100376e - 15$
10^{-5}	$-3.330669073875470e - 15$

Hva skjedde her? Feilen etter n steg proporsjonal med h^4 , altså fire desimaler for hver tideling av h , men bare for de første tre tidelingene. Når $h = 10^{-3}$ har vi nådd såkalt *maskinpresisjon*. Matlab regner bare med 16 desimaler, og dette setter en stopper for konvergens. $\triangle$

Eksempel 10.10. RK4, men nå har matlab fått beskjed om å regne med 32 desimaler:

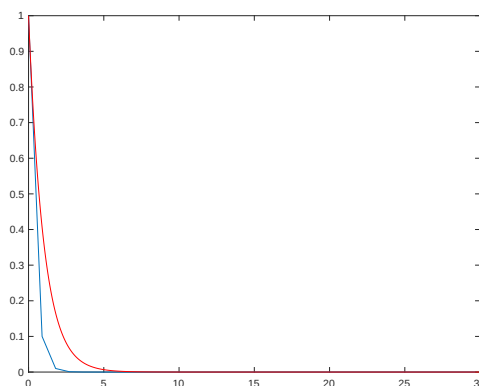
h	$y_n - y(1)$
10^{-1}	$3.332410561118064e - 07$
10^{-2}	$3.091319001284922e - 11$
10^{-3}	$3.068217823302200e - 15$
10^{-4}	$3.065917492545278e - 19$
10^{-5}	$3.065687557054922e - 23$

Tabellene til nå har tatt en brøkdel av et sekund å produsere. Til sammenlikning tok denne her rundt ti minutter, pluss noen timer knotting for å finne ut av hvordan matlab skal regne riktig med 32 desimaler. Presisjon koster! $\triangle$

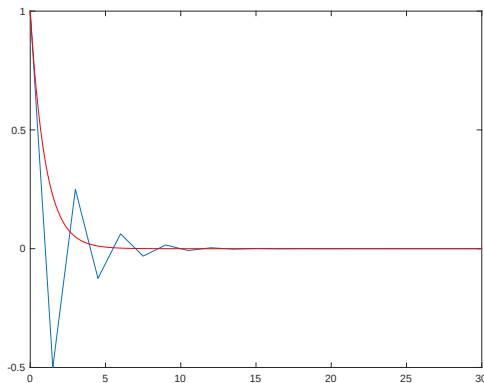
Stabilitet

Har metodene noen andre egenskaper? Eulers eksplisitte og implisitte metoder ser til forveksling like ut, og har akkurat samme orden. Men de oppfører seg ganske forskjellig.

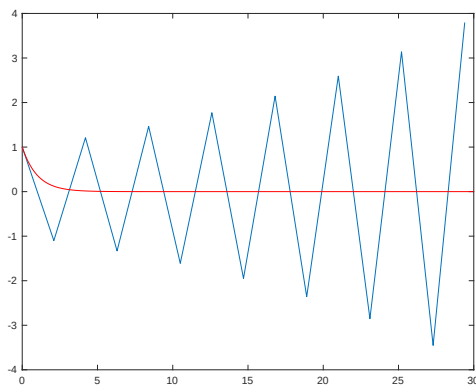
Eksempel 10.11. Vi kjører eksplisitt Euler på samme problem som over, men på intervallet $[0, 30]$, og $h = 0.9$. Det er trukket rette linjer mellom eulerstege- ne, så det skal bli litt enklere å se hva som skjer. $\triangle$



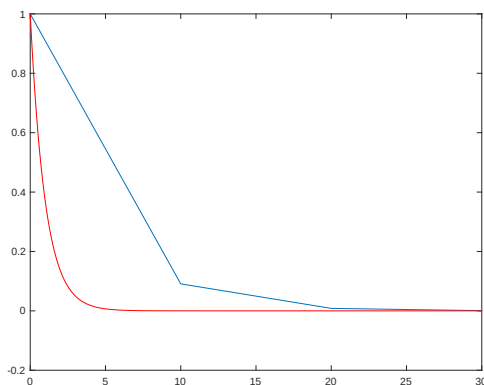
Eksempel 10.12. Vi kjører igjen på intervallet $[0, 30]$, men nå med $h = 1.5$. Den numeriske løsningen ser ut til å virre frem og tilbake en del før den sikter seg inn på rett spor. $\triangle$



Eksempel 10.13. Intervallet $[0, 30]$, men nå med $h = 2.1$. Hva den numeriske løsningen tenker på, er ikke godt å si, men noe fornuftig er det ihvertfall ikke. $\triangle$



Eksempel 10.14. Vi kan slå fast at eksplisitt Euler ikke fungerte, og det ser ut som om det går galt fordi h er for stor. Vi prøver Euler implisitt på samme intervall, men med $h = 10$. Det går riktig bra. $\triangle$



Forklaringen på hva som skjedde her, er ganske enkel. Eulers eksplisitte metode er, for eksemplet vi

har studert,

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i - hy_i \\ &= (1 - h)y_i \\ &= (1 - h)^2 y_{i-1} \\ &= (1 - h)^{i+1} y_0 = (1 - h)^{i+1}, \end{aligned}$$

med andre ord en geometrisk følge. Siden gymnasen har du visst at denne følgen divergerer dersom

$$|1 - h| \geq 1$$

og denne ulikheten blir innfridd akkurat i det h biker 2. Kjører vi samme resonnerementet på Euler implisitt, får vi

$$y_{i+1} = \frac{1}{(1 + h)^{i+1}}.$$

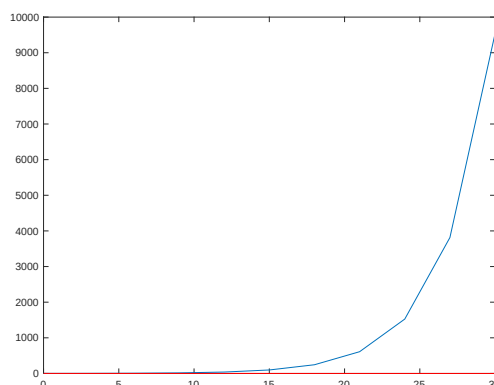
I vårt tilfelle er $h > 0$, så det må være klart at

$$0 < \frac{1}{(1 + h)^{i+1}} < 1,$$

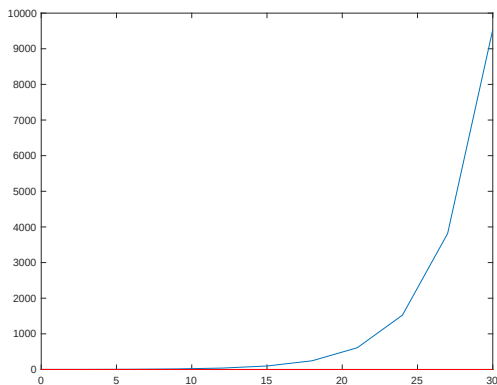
og følgelig konvergerer følgen mot 0 for alle valg av h .

Analysen vi har gjort, kalles *stabilitetsanalyse*, og $y' = -y$ er et såkalt *testproblem*. Vi får ikke eksakt informasjon om hvordan Eulers metode kommer til å oppføre seg for alle mulige differensiallikninger, men vi kan få en magefølelse allikevel. Vi skal ikke gå inn på en lengre diskusjon om stabilitetsanalyse, som er et forskningsfelt i seg selv, men nevne at stabilitetsproblemer er som regel betydelige for eksplisitte metoder, og ikke-eksisterende for implisitte metoder.

Eksempel 10.15. Vi prøver Heuns metode på $[0, 30]$, med $h = 3$. Som du ser, går det ganske dårlig. $\triangle$



Eksempel 10.16. Vi prøver RK4 på $[0, 30]$, med $h = 2.1$. Det går ikke noe bedre. $\triangle$



Mer om implisitte metoder

Så hvorfor bør vi ikke alltid bruke implisitte metoder? Det er et komplisert spørsmål å svare på, men vi skal gjøre et forsøk i dette avsnittet. Vi begynner med et eksempel, der vi setter opp de forskjellige numeriske metodene.

Eksempel 10.17. Vi skriver opp de forskjellige metodene for

$$y' = \frac{y - 2xy^2}{1 + x}.$$

Eksplisitt Euler:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{y_i - 2x_i y_i^2}{1 + x_i}$$

Implisitt Euler:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{y_{i+1} - 2x_{i+1} y_{i+1}^2}{1 + x_{i+1}}$$

Trapesmetoden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left(\frac{y_i - 2x_i y_i^2}{1 + x_i} + \frac{y_{i+1} - 2x_{i+1} y_{i+1}^2}{1 + x_{i+1}} \right)$$

Heuns metode

$$y_{i+1}^* = y_i + h \frac{y_i - 2x_i y_i^2}{1 + x_i}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left(\frac{y_i - 2x_i y_i^2}{1 + x_i} + \frac{y_{i+1}^* - 2x_{i+1} (y_{i+1}^*)^2}{1 + x_{i+1}} \right)$$

RK4

$$k_1 = \frac{y_i - 2x_i y_i^2}{1 + x_i}$$

$$k_2 = \frac{(y_i + \frac{h}{2} k_1) - 2(x_i + \frac{h}{2})(y_i + \frac{h}{2} k_1)^2}{1 + (x_i + \frac{h}{2})}$$

$$k_3 = \frac{(y_i + \frac{h}{2} k_2) - 2(x_i + \frac{h}{2})(y_i + \frac{h}{2} k_2)^2}{1 + (x_i + \frac{h}{2})}$$

$$k_4 = \frac{(y_i + h k_3) - 2(x_i + h)(y_i + h k_3)^2}{1 + (x_i + h)}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Jeg har for RK4 beholdt parentesene for å prøve å beholde den visuelle likhetene med de generelle likningene som definerer metoden. Men det er strengt tatt ikke nødvendig. $\triangle$

I dette eksemplet kan y_{i+1} beregnes analytisk for de implisitte metodene, men merk at dette fort kan bli en smule håpløst om likningene ikke er kvadratiske i y_{i+1} , slik som her. Standardteknikken er da å slå til med en numerisk likningsløser. Vanligvis er fikspunktmetoden et greit valg. Iterasjonen

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{y_{i+1} - 2x_{i+1} y_{i+1}^2}{1 + x_{i+1}}$$

allerede er på formen $y_{i+1} = g(y_{i+1})$, og dersom h er liten, blir gjerne g' liten, og da husker du fra tidligere at fikspunktmetoden konvergerer ganske kjapt.

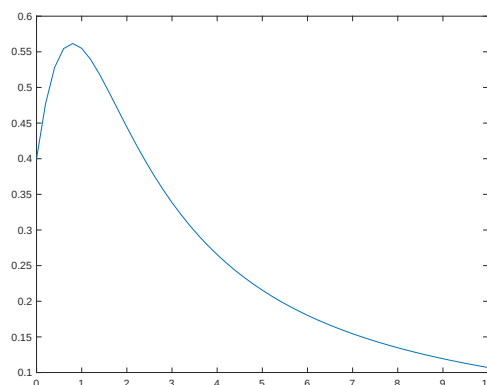
Eksempel 10.18. Vi løser

$$y' = \frac{y - 2xy^2}{1 + x} \quad y(0) = \frac{2}{5}$$

med

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{y_{i+1} - 2x_{i+1} y_{i+1}^2}{1 + x_{i+1}}.$$

Under er løsningskurve beregnet med $h = 0.2$ på intervallet $[0, 10]$. Fikspunktmetoden trengte med startgjetning y_i et sted mellom 13 og 21 iterasjoner for å nå maskinpresisjon i hvert steg. Med lavere h vil antall iterasjoner gå ned. $\triangle$



Eksemplet over illustrerer et viktig moment. Koster det mange flyttallsoperasjoner å kjøre en metode til en gitt presisjon? Det hjelper ikke å ha en metode som beregner alt til maskinpresisjon om metoden tar ett år å kjøre. Implisitte metoder er ofte robuste og stabile, men de koster også mer å bruke.

Systemer av differensiallikninger

Alle metodene gjennomgått til nå, fungerer like fint på systemer av differensiallikninger. Husk fra M3 at høyere ordens differensiallikninger kan skrives om til førsteordens systemer av differensiallikninger, så vi trenger ikke lage egne metoder for dem.

Eksempel 10.19. Differensiallikningen for en pendel er

$$y'' + \sin y = 0.$$

Vi skriver denne om til et system ved å sette $z = y'$, slik at systemet blir

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -\sin y \end{aligned}$$

Vi skriver nå opp metodene.

Eksplisitt Euler:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h z_i \\ z_{i+1} &= z_i - h \sin y_i \end{aligned}$$

Imspisitt Euler:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h z_{i+1} \\ z_{i+1} &= z_i - h \sin y_{i+1} \end{aligned}$$

Trapesmetoden:

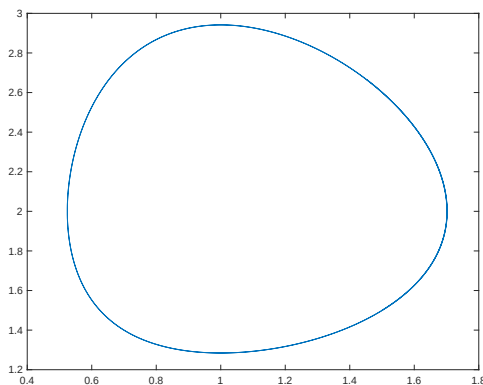
$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(z_i + z_{i+1}) \\ z_{i+1} &= z_i - \frac{h}{2}(\sin y_i + \sin y_{i+1}) \end{aligned}$$

Skjønner du disse her, klarer du nok Heun og RK4 også. (Alle k -ene blir vektorer med to komponenter.) Merk at man på de implisitte metodene må kjøre en eller annen flerdimensjonal likningsløser for å finne (y_{i+1}, z_{i+1}) i hvert steg. $\triangle$

Eksempel 10.20. Lotka-Volterra-systemet

$$\begin{aligned} y' &= y(2 - z) & y(0) &= 1.5 \\ z' &= z(y - 1) & z(0) &= 1.5 \end{aligned}$$

beskriver to dyrepopulasjoner, der den ene driver med predasjon på den andre. Dersom det er mange mus (y) i fjellet, får rev og mår (z) rikelig med mat til ungene sine, men er det få mus, vokser ikke så mange unger opp. Vi løser dette systemet med eksplisitt Euler, og får figuren under. $\triangle$

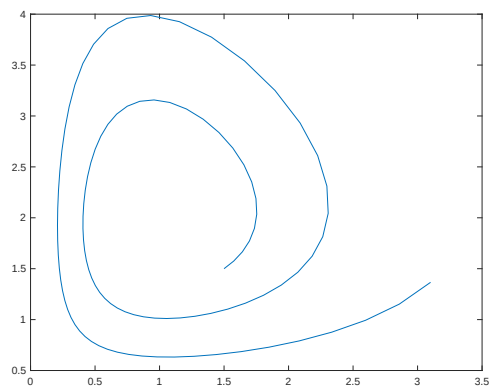


Bevaring av viktige størrelser

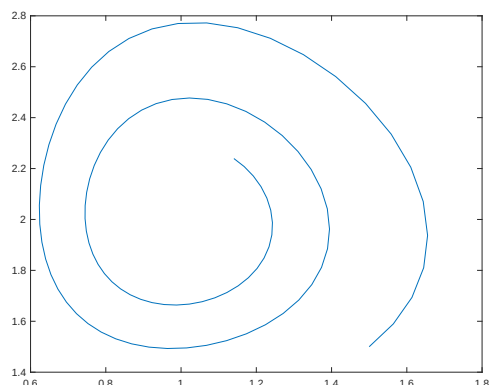
Nå skal vi ta for oss nok en instans av steg tre: har metodene noen andre egenskaper som er verdt å snakke om?

Det kan være lurt å ha følgende eksempel i bakhodet. La oss si at du ønsker å gjøre beregninger på planetenes gang i solsystemet. Du lærte på gymnaset at i solsystemet er energien for alle praktiske formål bevart, ihvertfall på kort sikt. Planetenes bevegelser følger Newtons gravitasjonslov, som for solsystemet vårt blir et differensiallikningssystem med tre likninger per planet. En numerisk metode for å simulere planetenes gang rundt solen, bør sørge for å bevare energien til hver planet, ellers kan planetene kjøre i numeriske spiraler ut i verdensrommet.

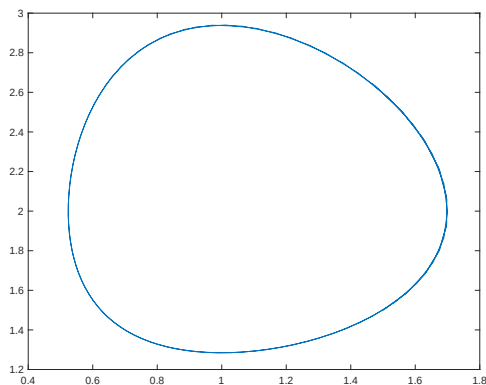
Eksempel 10.21. I forrige eksempel løste vi Lotka-Volterra med eksplisitt euler, og $h = 0.0001$ gav en pen figur. Hvis prøver med $h = 0.1$, får vi figuren under. Systemet starter i $(1.5, 1.5)$, så vi ser at Euler lager en utadgående spiral. $\triangle$



Eksempel 10.22. Nå kjører vi implisitt euler med $h = 0.1$, og får følgende figur. Siden systemet starter i $(1.5, 1.5)$, ser vi at dette er en innadgående spiral. $\triangle$



Eksempel 10.23. Trapesmetoden klarer visst å beholde det pene periodiske svingemønsteret, selv med $h = 0.1$. $\triangle$

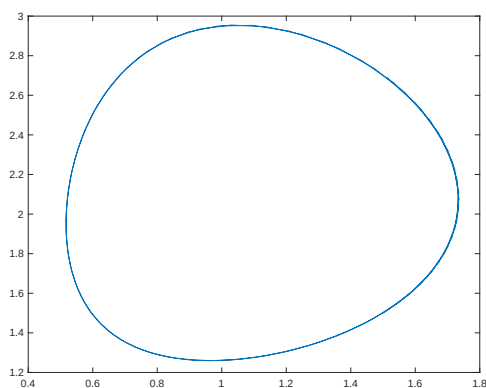


Hvorvidt figurene i de tre eksemplene over ble spiraler eller lukkede kurver, har ingenting med differensiallikningene å gjøre; det er kun forskjeller i de numeriske metodene som slår ut her. Løsningene skal definitivt være lukkede baner, og vi slår oss til ro med at trapesmetoden klarer noe som ikke eksplisitt og implisitt euler klarer. Vi merker oss også at numeriske metoder for differensiallikninger er mer enn bare presisjon og desimaler. Dette er for øvrig også et forskningsfelt som kalles *geometrisk integrasjon* - studiet om artige fenomener i numerisk løsning av differensiallikninger.

Eksempel 10.24. Vi tar et siste eksempel. *Symplektisk Euler* er definert ved følgende skjema

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hy_i(2 - z_i) \\ z_{i+1} &= z_i + hz_i(y_{i+1} - 1), \end{aligned}$$

og produserer en tilsvarende pen figur. Symplektisk euler bevarer nemlig noe som kalles *den symplektiske strukturen*. $\triangle$



Eksempel 10.25. Som absolutt siste eksempel (jeg lover), tar vi eksplisitt Euler med $h = 0.001$, men for $x \in [0, 1000]$. Dette er litt for å demonstrere at det går galt selv med små h (det spiller ingen rolle hvor liten h er her, det går åt skogen uansett). Og litt fordi figuren var så vakker å skue. I eksempel 10.20 var ikke intervallet langt nok til at spiraleringen kom til uttrykk i figuren. Men den er der. $\triangle$

