Vi skal lage numerisk metoder for varmeligningen

$$u_t = u_{xx}$$

med randkrav

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

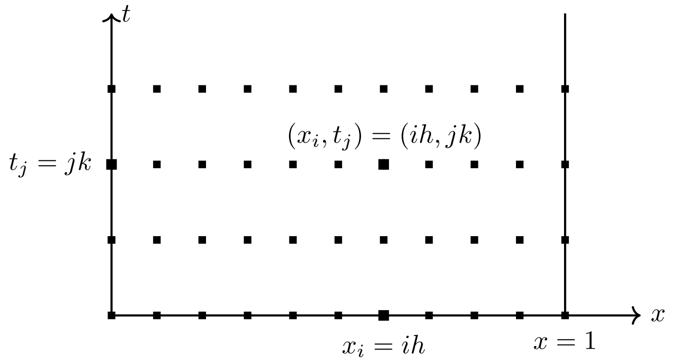
og

$$u(x,0) = f(x).$$

Metodene vi skal lage er basert på ting vi har gjort tidligere, og varmelikningen er kun en illustrasjon. Det er relativt lett å konstruere liknende metoder for andre likninger med de teknikkene vi skal gå gjennom for varmelikningen.

Gitteret

Når vi skal løse en partiell differensiallikning, må vi holde styr på to gitre - et i x-retningen, og et i t-retningen. Vi skal finne approksimasjoner til løsningen u i alle gitterpunktene. Vi gitrer opp intervallet $[0,1]$ på x-aksen med gitteravstanden h, og nummererer punktene slik at $x_0 = 0$ og $x_n = 1$. Den positive t-aksen gitrer vi opp med gitteravstanden k, og nummerer slik at $t_0 = 0$.



Diskretisering i x

Vi setter først opp en tilnærming for $u_{xx}(x,t)$, basert på den andre ordens endelige differanseformelen for x:

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

Man kan fint bruke høyere ordens differanseformler, men det skal ikke vi gjøre. Vi kan nå tenke at vi erstatter $u(x,t)$ med $n+1$ envariable funksjoner $u_i(t)$, som beskriver temperaturendringen i hvert sitt punkt x_i på stangen:

$$u_{xx}(x_i,t) \approx \frac{u_{i+1}(t) - 2u_{ij}(t) + u_{i-1}(t)}{h^2},$$

Nå setter vi inn dette uttrykket i varmelikningen:

$$u_t(x_i,t) = u_{xx}(x_i,t) \approx \frac{u_{i+1}(t) - 2u_{ij}(t) + u_{i-1}(t)}{h^2},$$

Siden u_i kun er en funksjon av t, passer det å skrive

$$u_i'(t) = \frac{u_{i+1}(t) - 2u_{ij}(t) + u_{i-1}(t)}{h^2},$$

som vi kjenner igjen som et system av ordinære differensiallikninger. Dette systemet har $n-1$ likninger, for i $u_0 = 0$ og $u_n = 0$ kjenner vi; disse er gitt av randbetingelsene.

Diskretisering i t

Nå kan vi løse systemet med en ønsket metode fra forrige kapittel, og vi skal ta i betraktning tre valg. Etter diskretiseringen i t, skriver vi approksimasjonen i punktet (x_i, t_j) som u_{ij}:

$$u(x_i, t_j) \approx u_{ij}$$

De tre metodene vi skal bruke, er eksplisitt Euler, implisitt Euler, og trapesmetoden. De korresponderende skjemaene for varmelikningen blir:

Eksplisitt:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

Implisitt:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

Crank-Nicholson:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{2h^2}$$

Teorem 11.1. *Det explisitte og implisitte skjema er av orden 1 i t, og av orden 2 i x. Crank-Nicolson er av orden 2 i begge variable.*

Beviset er en ganske hårete variant av argumentet for ordenen til eksplisitt Euler i forrige kapittel. Hver av disse skjemaene har sine fordeler, og vi skal behandle dem i tur og orden.

Eksplisitt skjema

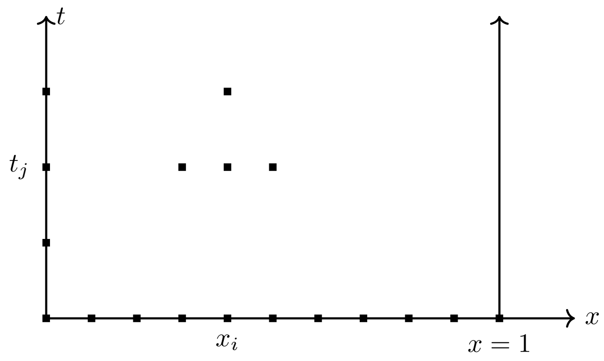
Det eksplisitte skjemaet

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

har egentlig bare en fordel: det er så lett å programmere opp. Vi løser for $u_{i,j+1}$, og får

$$u_{i,j+1} = u_{ij} + \frac{k}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right)$$

Nå er det vanlig å tegne opp noe som kalles *stensilen.* Dette er en figur som illustrerer hvilke gitterpunkter som er involvert i ligningen man bruker for å beregne nye approksimasjoner.



Anta at du har beregnet u_{ij} for alle i og opp til og med en bestemt j. Vi kan da enkelt beregne $u_{i,j+1}$ for alle i ved å bruke formelen.

For å analysere mer, må vi sette opp et matrise-vektorprodukt som beskriver iterasjonen. Vi definerer

$$\mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{n-2,j} \\ u_{n-1,j} \end{bmatrix}$$

Det eksplisitte skjemaet kan skrives kompakt som

$$\mathbf{u}_{j+1} = (I - \frac{k}{h^2}A)\mathbf{u}_j$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Det kan vises at denne matrisen har $n-1$ forskjellige egenverdier gitt ved

$$\lambda_k = 4\sin^2\frac{k\pi}{2n} \quad \text{for} \quad 1 \le k \le n-1.$$

Egenverdiene til

$$I - \frac{k}{h^2}A$$

er dermed gitt ved

$$1 - 4\frac{k}{h^2}\sin^2\frac{k\pi}{2n}.$$

Dersom

$$\frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}.$$

går dette veldig bra, for alle egenverdiene er mellom 0 og 1. Da vil

$$\mathbf{u}_{j+1} = (I - \frac{k}{h^2}A)\mathbf{u}_j$$

være en kontraksjon, og konvergere mot et fikspunkt. Dersom

$$\frac{k}{h^2} \ge \frac{1}{2}$$

vil egenverdiene sende $\mathbf{u}_i$ mot uendelig, og dette er ikke oppførsel vi ønsker fra et numerisk skjema for varmelikningen. Vi vet jo at temperaturen skal synke mot 0 i denne situasjonen!

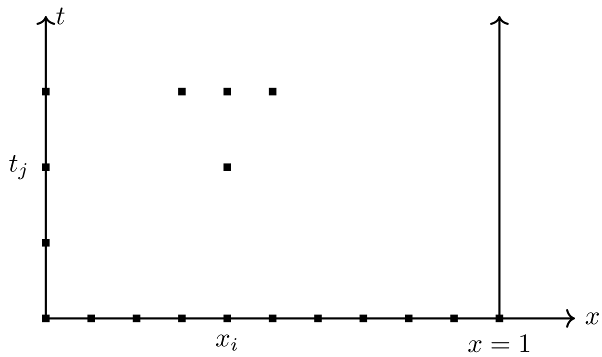
Dette er ganske restriktivt. Kanskje noen andre skjema er enklere å ha med å gjøre.

Implisitt skjema

Problemet med det eksplisitte skjemaet er at det går til h... med mindre $k/h^2 < 1/2$, og dette gjør at du må ha veldig tett mellom punktene t-aksen. Akkurat som for ordinære differensiallikningner, kan vi bøte på dette med å bruke implisitt skjema. Det implisitte skjemaet skriver vi

$$\left(1 + 2\frac{k}{h^2}\right)u_{i,j+1} - \frac{k}{h^2}u_{i+1,j+1} - \frac{k}{h^2}u_{i-1,j+1} = u_{ij}.$$

Stensilen er



I hver tidssteg må vi løse et lineært likningssystem

$$(I + \frac{k}{h^2}A)\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j$$

der A er den samme matrisen som i sted.

Egenverdiene til $(I + \frac{k}{h^2}A)$ er

$$1 + 4\frac{k}{h^2}\sin^2\frac{k\pi}{2n},$$

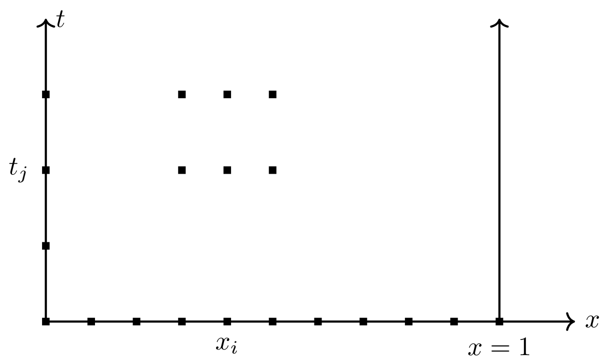
som åpenbart er større enn 1 uansett hva $\frac{k}{h^2}$ er. Dermed vil egenverdiene til $(I+\frac{k}{h^2}A)^{-1}$ alltid være mindre enn 1, og følgelig vil skjemaet konvergere mot 0 uansett.

Crank-Nicolson

Crank-Nicolson skriver vi

$$2u_{i,j+1} + \frac{k}{h^2}\left(-u_{i+1,j+1} + 2u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}\right) = \\ 2u_{ij} - \frac{k}{h^2}\left(-u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}\right).$$

Stensilen er



Også her blir det et lineært ligningssystem

$$(2I + \frac{k}{h^2}A)\mathbf{u}_{j+1} = (2I - \frac{k}{h^2}A)\mathbf{u}_j$$

å løse på hvert tidssteg. Det kan vises at Crank-Nicolson er en stabil metode for varmelikningen, men det dropper vi.

Laplaces likning

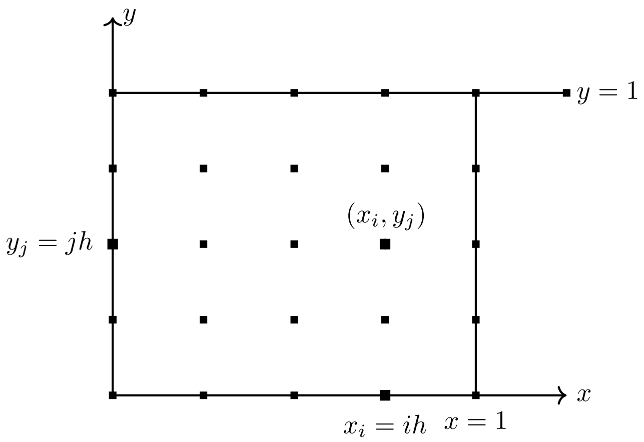
Vi kan også sette opp et numerisk skjema for Laplaces likning

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

på kvadratet $[0,1] \times [0,1]$ med randkrav

$$u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0 \qquad \text{og} \qquad u(x,1) = f(x).$$

Vi gitrer opp på følgende vis:



og bruker den kjente og kjære differanseformelen

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

i både x og y, slik at vi får skjemaet

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 0.$$

Nå er u kjent på sidekantene til kvadratet, slik at det er kun de indre gitterpunktene som gir opphav til likninger og ukjente. La oss si at det er $n-1$ indre gitterpunkter i hver koordinatretning, slik at antall likninger og ukjente blir $(n-1)^2$. Vi organiserer u_{ij} i en vektor på formen

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n-1,1} \\ u_{1,2} \\ \vdots \\ u_{n-1,2} \\ u_{1,3} \\ \vdots \\ u_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

og får følgelig et likningssystem på formen

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

der

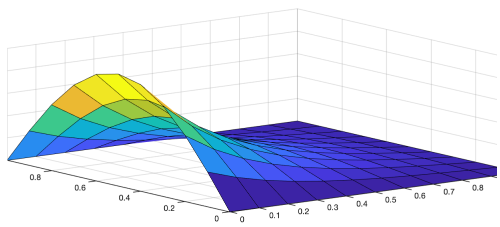
$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

og

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 & & & & \\ 0 & B & 0 & & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & 0 & B & 0 \\ & & & & 0 & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & 0 & & & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & & -1 \\ -1 & & \ddots & \ddots & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Den første matrisen i uttrykket for A er en såkalt blokkdiagonal matrise, og den andre matrisen har to sammenhengende super- og subdiagonaler med -1 i alle komponenter, der superdiagonalen begynner i rad n, og subdiagonalen begynner i kolonne n.

Under er et plot av en løsning der $f(x) = \sin \pi x$.



Varmelikningen på en plate

Hvis man først har forstått hvordan laplaces likning diskretiseres, er det ikke så vanskelig å forstå hvordan man diskretiserer varmelikningen i to romlige dimensjoner. Temperaturen i platen er gitt ved funksjonen $u(x,y,t)$, men nå tillater vi at temperaturen varierer med tiden, og problemet vi skal løse, er

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

med randkrav

$$u(0,y,t) = u(1,y,t) = u(x,0,t) = 0$$
$$u(x,1,t) = f(x)$$

og initialkrav

$$u(x,y,0) = g(x,y).$$

Gitter i x og y blir det samme som for laplaces likning, mens k er tidssteget. Vi lar telleren i tid være

m. Vi diskretiserer med de samme differanseformlene som før, og får eksplisitt skjema:

$$\frac{u_{i,j,m+1} - u_{i,j,m}}{k} = \frac{u_{i+1,j,m} - 2u_{i,j,m} + u_{i-1,j,m}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1,m} - 2u_{i,j,m} + u_{i,j-1,m}}{h^2}$$

implisitt skjema:

$$\frac{u_{i,j,m+1} - u_{i,j,m}}{k} = \frac{u_{i+1,j,m+1} - 2u_{i,j,m+1} + u_{i-1,j,m+1}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1,m+1} - 2u_{i,j,m+1} + u_{i,j-1,m+1}}{h^2}$$

og Crank-Nicolson

$$\frac{u_{i,j,m+1} - u_{i,j,m}}{k} = \frac{u_{i+1,j,m} - 2u_{i,j,m} + u_{i-1,j,m}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1,m} - 2u_{i,j,m} + u_{i,j-1,m}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j,m+1} - 2u_{i,j,m+1} + u_{i-1,j,m+1}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1,m+1} - 2u_{i,j,m+1} + u_{i,j-1,m+1}}{h^2}$$

Det går an å skrive disse skjemaene om til matrise-vektor-iterasjoner på samme vis som i det endimensjonale tilfellet. For eksplisitt skjema får vi

$$\mathbf{u}_{m+1} = \left(I - \frac{k}{h^2}A\right)\mathbf{u}_m + \frac{k}{h^2}\mathbf{f}$$

der A er matrisen fra diskretiseringen av Laplaces likning, og

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Likninger for implisitt skjema og Crank-Nicolson blir henholdsvis

$$\left(I + \frac{k}{h^2}A\right)\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}_m + \frac{k}{h^2}\mathbf{f}$$

og

$$\left(I + \frac{k}{2h^2}A\right)\mathbf{u}_{m+1} = \left(\left(I - \frac{k}{2h^2}A\right)\mathbf{u}_m + \frac{k}{2h^2}\mathbf{f}\right) + \frac{k}{2h^2}\mathbf{f}.$$