Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4125 Matematikk 4N**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato: 6. juni 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C: Bestemt, enkel kalkulator, og vedlagte formelark.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes. Valgfritt programmeringsspråk i programmeringsoppgaver. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 7

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Vi laplacetransformerer likningen, bruker initialkravene, og får

$$(s^2+1)\mathcal{L}(y) = e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}$$

eller

$$\mathcal{L}(y) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}.$$

Vi inverterer disse laplacetransformene, og får

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t-\pi)\sin(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin(t-2\pi) \\ &= (-u(t-\pi) + u(t-2\pi))\sin t \end{aligned}$$

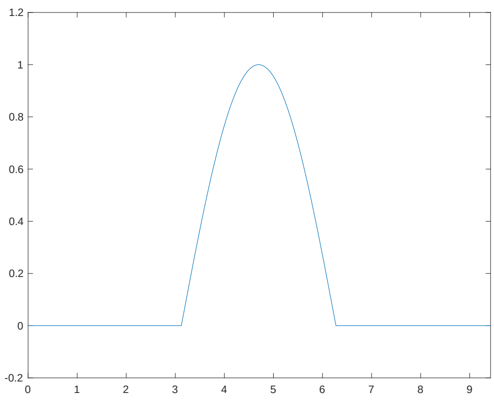
der

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

Løsningen kan også skrives

$$u(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{for } \pi \leq x < 2\pi \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Løsningen er identisk lik null frem til tiden $t = \pi$. På dette tidspunktet blir løsningen utsatt for en impuls rettet langs den positive y-aksen, som setter igang en sinusoidal svinging. Den neste impulsen ved tiden $t = 2\pi$ er rettet samme vei, men inntreffer akkurat idet løsningen passerer t-aksen på vei nedover, og resultatet blir at hele bevegelsen stopper opp.



Oppgave 2

a) Vi antar at det er mulig å skrive

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

på intervallet $[-\pi, \pi]$. Først observerer vi at

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x)}\,dx = \begin{cases} 2\pi & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Dersom vi ganger likningen

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

med e^{-imx} på begge sider og integrerer fra $-\pi$ til π, får vi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} e^{-inx}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = 2\pi c_m$$

eller

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

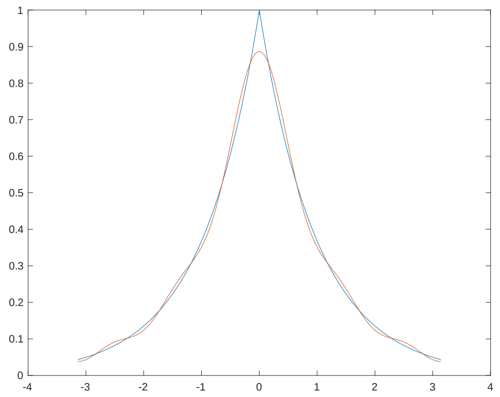
b) Vi beregner

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} e^{x}e^{-inx}\,dx + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-x}e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} e^{(1-in)x}\,dx + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} e^{(1+in)x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi(1-in)} \left(1 - e^{-(1-in)\pi}\right) + \frac{1}{2\pi(1+in)} \left(1 - e^{-(1+in)\pi}\right) \\ &= \frac{(1-e^{-\pi}(-1)^n)}{2\pi} \left(\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{(1-e^{-\pi}(-1)^n)}{1+n^2} \end{aligned}$$

slik at

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1-e^{-\pi}(-1)^n)}{1+n^2} e^{inx} = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-\pi}(-1)^n)}{1+n^2} \cos nx.$$

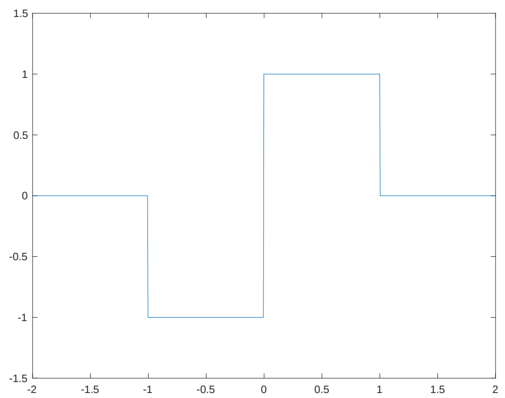
Merk at det er trygt å skrive likhetstegn mellom f og fourierrekken siden f er kontinuerlig og $f(-\pi) = f(\pi)$. Under er et plot av f og S_5.



Oppgave 3 Funksjonen

$$-u(x+1) + 2u(x) + u(x-1) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

ser slik ut:



Fouriertransformen blir:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(- \int_{-1}^{0} e^{-iwx}\, dx + \int_{0}^{1} e^{-iwx}\, dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{iw}(1 - e^{iw}) + \frac{1}{iw}(1 - e^{-iw}) \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{iw}(1 - \cos w).\end{aligned}$$

Oppgave 4 Vi antar løsningen kan skrives

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

og setter inn i varmelikningen, slik at

$$F(x)G'(t) = F''(x)G(t).$$

Vi deler på $F(x)G(t)$, og får

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

Siden den ene siden kun avhenger av t og den andre kun av x, må begge sider være konstante, slik at

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k.$$

Vi begynner med å analysere

$$F''(x) - kF(x) = 0.$$

Kan $k = 0$? Nei. Vi får i så fall $F(x) = Ax + B$ og $G(t) = C$, og randkravene blir tilfredsstilt om $A = 0$. Men initialkravet kan vi bare glemme, for løsningen $u(x,t)$ blir en konstant.

Vi prøver $k > 0$. I så fall blir $G(t) = Ae^{kt}$. Siden $k > 0$, vil vi få

$$\lim_{t\to\infty} |u(x,t)| = \lim_{t\to\infty} |F(x)| e^{kt} = \infty.$$

Denne løsningen er åpenbart ufysisk, for dette er en situasjon med en stang som er isolert i endepunktene, og varmeenergien tilstede ved $t = 0$ skal helst fordele seg jevnt på stangen, ikke gå mot uendelig. Så om vi skulle slumpe til å finne en løsning av problemet med $k > 0$, vil den løsningen ikke ha noen fysisk relevans.

Altså prøver vi $k < 0$. Løsningen på $F''(x) - kF(x) = 0$ blir

$$F(x) = A\cos\sqrt{-k}x + B\sin\sqrt{-k}x.$$

Den ene randbetingelsen $u_x(0,t) = 0$ gir

$$u(0,t) = G(t)F'(0) = G(t)\left(-A\sin\sqrt{-k}\cdot 0 + B\cos\sqrt{-k}\cdot 0\right) = 0$$

slik at $B = 0$. Den andre randbetingelsen gir

$$u(\pi,t) = G(t)F'(\pi) = -AG(t)\sin\sqrt{-k}\pi = 0,$$

så setter vi $\sqrt{-k} = n$, eller $k = -n^2$, får vi den tilfredsstilt. Vi kan videre bestemme G fra $G'(t) + n^2 G(t) = 0$, og få

$$G(t) = B_n e^{-n^2 t}$$

Alt i alt får vi en familie av løsninger

$$u_n(x,t) = B_n e^{-n^2 t}\cos nx,$$

som alle tilfredsstiller varmelikningene og randbetingelsene. Nå er det langt fra trivielt å vise at vi kan legge sammen alle disse

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-n^2 t}\cos nx,$$

og i det hele tatt få en deriverbar funksjon. Men det kan vi. Vi hopper over hele problemstillingen, og går umiddelbart videre til å takle initialkravet $u(x,0) = e^{-x}$, som gir

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos nx = e^{-x},$$

altså må B_n være koeffisientene i cosinusrekken til e^{-x}. Denne rekken fant vi i oppgave 2b, og vi kan skrive opp løsningen

$$u(x,t) = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-\pi}(-1)^n)}{1+n^2} e^{-n^2 t}\cos nx.$$

Oppgave 5 Vi kaller punktene x_k og funksjonsverdiene f_k, der $0 \le k \le n$. Lagrangepolynomet

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \prod_{i\neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

har maksimal grad n og interpolerer tabellen, så vi vet at et interpolerende polynom eksisterer. Vi må vise at det er entydig. La q være et annet interpolerende polynom av maksimal grad n. Polynomet $p - q$ har også maksimal grad n, og har $n+1$ nullpunkter, for

$$p(x_k) - q(x_k) = 0$$

for alle k, siden begge polynomer interpolerer den samme tabellen. Men et polynom av grad n kan maksimalt ha n nullpunkter, med mindre det er identisk lik null, og derfor må $p = q$.

Oppgave 6 Her må vi til med differansen

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h},$$

og $h = 0.00001$ gjør jobben. Differansen

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

klarer ikke oppnå høyere presisjon en ni desimaler eller så.

Oppgave 7 Hvis du ønsker å slippe å evaluere kvadraturregelen, kan du huske at $n+1$-punkts Gauss-Legendre-regel er eksakt for polynomer av grad $2n+1$. Her er $n+1 = 5$ og $2n+1 = 9$, og derfor får vi

$$\sum_{i=0}^{4} A_i f_i = \int_{-1}^{1} x^8 + x^6 \, dx = \frac{32}{63}.$$

Oppgave 8

Matlab:

```
n=100;
h=2/n;
y=zeros(n+1,1);
y(1)=1;

for i=1:3*n
    y(i+1)=(1-3*h)*y(i);
end
disp(y(end))
```

Python:

```
import numpy as np

n=100.0;
h=2/n;
y=np.zeros(int(n+1));
y[0]=1;

for i in range(int(n)):
    y[i+1]=(1-3*h)*y[i]

print y[int(n)]
```

Den analytiske løsningen $y(t) = e^{-3t}$ går mot null når $t \to \infty$. Vi ser at Eulers eksplisitte metode er en en geometrisk følge gitt ved

$$y_n = (1-3h)^n.$$

Denne følgen konvergerer mot null dersom

$$-1 < 1 - 3h < 1$$

altså at

$$0 < h < \frac{2}{3}.$$

Eulers eksplisitte metode er derfor stabil for $h \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$.

Oppgave 9 Matlab:

```
n=10;    h=1/n;
m=100;  k=1/m;
r=k/h^2;

x=0:h:1;
t=0:k:.1;

u=zeros(n+1,m+1);
u(:,1)=ones(size(x));

r=r/2;
A_v=(1+2*r)*diag(ones(n-1,1))-r*diag(ones(n-2,1),-1)-r*diag(ones(n-2,1),1);
A_h=(1-2*r)*diag(ones(n-1,1))+r*diag(ones(n-2,1),-1)+r*diag(ones(n-2,1),1);

for j=1:m
       u(2:n,j+1)=A_v\(A_h*u(2:n,j));
end
```