NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4125 Matematikk 4N**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato: 6. juni 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C: Bestemt, enkel kalkulator, og vedlagte formelark.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes. Valgfritt programmeringsspråk i programmeringsoppgaver. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave
Originalen er:
1-sidig ☐ **2-sidig** ☒
sort/hvit ☒ **farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐

Dato Sign

Oppgave 1 La δ være Diracs deltafunksjon. Løs initialverdiproblemet

$$y''(t) + y(t) = \delta(t-\pi) + \delta(t-2\pi) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

og skisser løsningen.

Oppgave 2 La f være en funksjon, og anta at det er mulig å skrive

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

på intervallet $[-\pi, \pi]$.

a) Vis at

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx.$$

b) La $f(x) = e^{-|x|}$. Finn fourierrekken til f på $[-\pi, \pi]$, og skisser denne på intervallet $[-3\pi, 3\pi]$.

Oppgave 3 La u være heavisidefunksjonen

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

Skisser funksjonen $-u(x+1) + 2u(x) - u(x-1)$, og finn dennes fouriertransform.

Oppgave 4 Finn løsningen til varmelikningen

$$u_t = u_{xx},$$

for $0 \leq x \leq \pi$ og $t \geq 0$ med randkrav

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$$

og initialkrav

$$u(x,0) = e^{-x}.$$

Oppgave 5 Anta at du har en tabell med $n+1$ forskjellige punkter på x-aksen, og tilhørende funksjonsverdier. Vis at det finnes et entydig polynom av maksimal grad n som interpolerer tabellen.

Oppgave 6 La

$$f(x) = \cos x.$$

Bruk en endelig differanseformel til å tilnærme $f'(1) \approx -0.841470984807897$ med en feil på mindre enn 10^{-9}.

Oppgave 7 Finn en tilnærming til integralet

$$\int_{-1}^{1} x^8 + x^6 \, dx = \frac{32}{63}$$

ved hjelp av fempunkts Gauss-Legendre-kvadratur.

Oppgave 8 Skriv et script som finner en tilnærming til $y(2)$, der

$$y' = -3y \quad y(0) = 1,$$

ved Eulers eksplisitte metode, med fritt valgt steglengde h. For hvilke valg av h er metoden stabil?

Oppgave 9 Vi skal løse varmelikningen

$$u_t = u_{xx},$$

for $0 \leq x \leq 1$ og $t \geq 0$ med randkrav

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

og initialkrav

$$u(x,0) = 1.$$

Skriv et script som løser problemet numerisk med Crank-Nicolsons skjema for $t \in [0,1]$.

LAPLACETRANSFORM

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = F(s)$$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at}\cos t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+1}$
$e^{at}\sin t$	$\frac{1}{(s-a)^2+1}$

FOURIERTRANSFORM

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iwx}\,dx = \hat{f}(w),$$

$f(x)$	$\hat{f}(w)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}$
$e^{-a\|x\|}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+w^2}$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-a\|w\|}}{a}$

GAUSSKVADRATUR

Gauss-Legendre

n	x_i	A_i
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
5	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
5	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$

Gauss-Lobatto

n	x_i	A_i
3	0	$\frac{4}{3}$
	± 1	$\frac{1}{3}$
4	$\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\frac{5}{6}$
	± 1	$\frac{1}{6}$
5	0	$\frac{32}{45}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{49}{90}$
	± 1	$\frac{1}{10}$
6	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{7}}}}$	$\frac{14+\sqrt{7}}{30}$
	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{7}}}}$	$\frac{14-\sqrt{7}}{30}$
	± 1	$\frac{1}{15}$
7	0	$\frac{256}{525}$
	$\pm\sqrt{\frac{5}{11}-\frac{2}{11}\sqrt{\frac{5}{3}}}$	$\frac{124+7\sqrt{15}}{350}$
	$\pm\sqrt{\frac{5}{11}+\frac{2}{11}\sqrt{\frac{5}{3}}}$	$\frac{124-7\sqrt{15}}{350}$
	± 1	$\frac{1}{21}$