

Fourieranalyse

Fourierrekker på reell form

En funksjon sies å ha periode $p > 0$ dersom

$$f(x + p) = f(x) \quad (1)$$

for alle x i definisjonsmengden til f . Den minste p slik at (1) holder, kalles fundamentalperioden til f . Standardeksemplet er $f(x) = \sin x$, som har perioder $2\pi, 4\pi, 6\pi$ osv, og fundamentalperiode 2π .

Eksempel La

$$f(x) = \cos(3x)$$

Hva er periodene til f ? Hva er fundamentalperioden til f ? Dersom $f(x)$ har periode p , har $g(x) = f(kx)$ periode p/k , for

$$g(x) = f(kx) = f(kx + p) = f(k(x + p/k)) = g(x + p/k).$$

Altså har $\cos 3x$ perioder $p = 2n\pi/3$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Fundamentalperioden er $p = 2\pi/3$.

En fourierrekke er en rekke på formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Merk at fourierrekken har fundamentalperiode $2L$. La f være en funksjon med definisjonsmengde $(-L, L)$. Fourieranalyse handler om å skrive f som en fourierrekke:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (2)$$

For å bestemme koeffisientene a_n ganger vi (2) med $\cos \frac{m\pi x}{L}$ og integrerer fra $-L$ til L

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \left(a_0 \cos \frac{m\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \right) dx. \quad (3)$$

Vi beregner så

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 2L & \text{for } m = 0 \\ 0 & \text{for } m \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{(n+m)\pi}{L} x + \cos \frac{(n-m)\pi}{L} x dx = \begin{cases} L & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{(n+m)\pi}{L} x + \sin \frac{(n-m)\pi}{L} x dx = 0.$$

Dersom vi bruker disse resultatene i (3), står vi igjen med

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

og

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

for $n \geq 1$. Likeledes kan vi utlede formelen

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

ved å gange (2) med $\sin \frac{m\pi x}{L}$ og integrere fra $-L$ til L .

Teorem Dersom f er stykkvis kontinuert og deriverbar på $(-L, L)$, konvergerer fourierrekken $f(x)$ for alle punkter der f er kontinuert. I punkter der f har sprang, konvergerer fourierrekken til midt i spranget.

Eksempel Vi finner fourierrekken til

$$f(x) = x \quad \text{der } x \in (-\pi, \pi).$$

Her er $L = \pi$. Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

Merk at symmetri gir a_0 og a_n , mens b_n må beregnes. Fourierrekken til f blir

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Eksempel Vi finner heavisidefunksjonen

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

sin fourierrekke på $(-\pi, \pi)$. Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2},$$

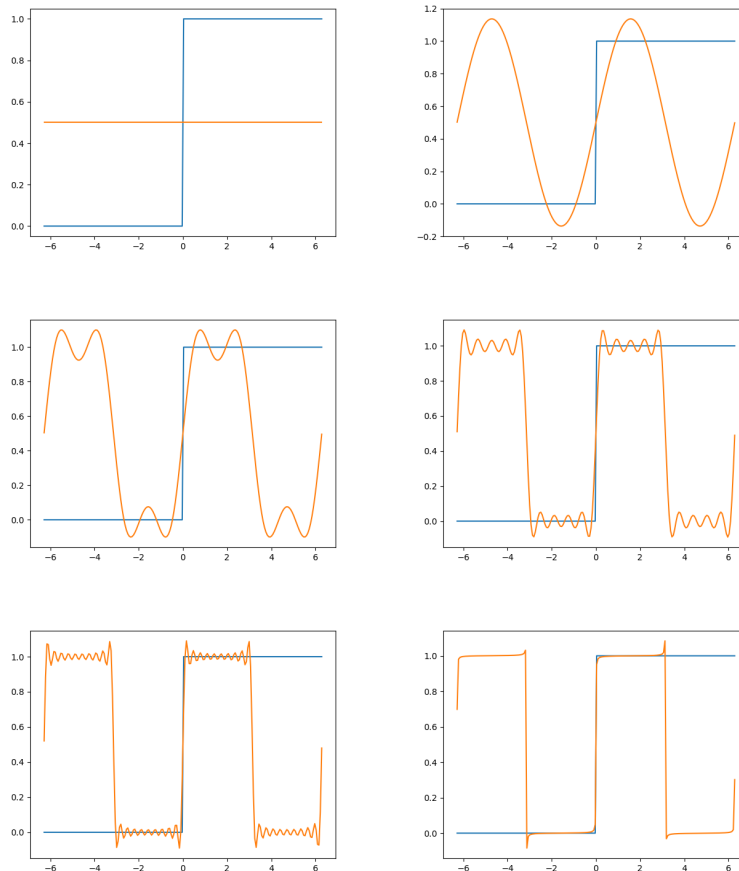
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{for } n \text{ oddetall} \\ 0 & \text{for } n \text{ partall.} \end{cases}$$

Altså kan vi skrive

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x$$

Her er plot av et par partialsummene for $n = 0, 1, 2, 5, 10$ og 50 . Jeg har plottet på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ for å illustrere hvordan fourierrekken oppfører seg utenfor intervallet der man approssimerer funksjonen. Merk at $H - \frac{1}{2}$ er en odde funksjon. Denne strukturen kommer til syne i



fourierrekken til H , se neste avsnitt.

Odde og jevne utvidelser

Vi sier at en funksjon er odde dersom

$$f(-x) = -f(x)$$

og jevn dersom

$$f(-x) = f(x).$$

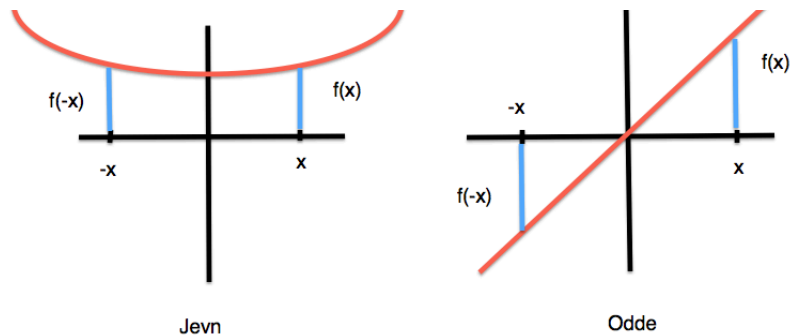
for alle x i definisjonsmengden til f . Grafen til en odde funksjon blir identisk dersom du dreier den π radianer om origo, mens grafen til en jevn funksjon blir identisk dersom du speiler den om y -aksen. En rask kikk på figur overbeviser oss om at

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0$$

for odde funksjoner, og

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

for jevne funksjoner.



Eksempel Man kan vise at produktet av to jevne eller to odde funksjoner blir en jevn funksjon, og at produktet av en jevn og en odde funksjon blir en odde funksjon. La f være odde og g være jevn. Siden $f(-x) = -f(x)$, og $g(-x) = g(x)$, får vi

$$f(-x)g(-x) = -f(x)g(x),$$

altså er fg en odde funksjon. De andre tilfellene bevises på samme måte.

Vi merker oss at dersom f er odde, er $a_n = 0$ for alle n , mens dersom f er jevn, er $b_n = 0$ for alle n . Fourierrekken til en odde funksjon inneholder følgelig kun sinusfunksjoner, mens fourierrekken til jevne funksjoner inneholder kun cosinusfunksjoner.

Dersom en funksjon f har definisjonsmengde $(0, L)$, kan vi definere den odde utvidelsen

$$f_o = \begin{cases} f(x) & \text{for } x = (0, L) \\ -f(-x) & \text{for } x = (-L, 0) \end{cases}$$

og den jevne utvidelsen

$$f_j = \begin{cases} f(x) & \text{for } x = (0, L) \\ f(-x) & \text{for } x = (-L, 0). \end{cases}$$

Siden både f_o og f_j er identiske med f på $(0, L)$, vil fourierrekkenes deres konvergere til $f(x)$ på $(0, L)$. Man kan således velge mellom sinus eller cosinus når man skal fourierutvikle f på $(0, L)$. Disse kalles henholdsvis sinus- og cosinusrekken til f på $(0, L)$.

Vi ser på fourierutviklingen til f_o . For den har vi at $a_n = 0$ for alle n , og at

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_o(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

For fourierutviklingen til f_j , har vi tilsvarende at

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_j(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

samt

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_j(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

Eksempel Vi beregner cosinusrekken til $f(x) = x$ på $(-\pi, \pi)$. Koeffisientene blir

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi/2$$

og

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{for odde } n \\ 0 & \text{for for jevne } n. \end{cases}$$

slik at

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$$

på intervallet $[0, 1]$.

Fourierrekker på kompleks form

Fra den komplekse analysen husker vi Eulers formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Vi skal i dette avsnittet skrive

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}. \quad (4)$$

Denne formen gir ut det samme, men er mer praktisk å jobbe med enn sinus- og cosinusfunksjoner. For å bestemme koeffisientene c_n , ganger vi (4) med $e^{-i \frac{m\pi x}{L}}$, og integrerer fra $-L$ til L

$$\int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{m\pi x}{L}} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-L}^L e^{i \frac{(n-m)\pi}{L} x} dx.$$

Dersom $n = m$, får vi

$$\int_{-L}^L e^{i \frac{(n-m)\pi}{L} x} dx = \int_{-L}^L dx = 2L.$$

Dersom $n \neq m$, får vi

$$\int_{-L}^L e^{i\frac{(n-m)\pi}{L}x} dx = \frac{1}{i(n-m)\pi} (e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}) = \frac{2}{(n-m)\pi} \sin(n-m)\pi = 0.$$

Altså er

$$\int_{-L}^L e^{i\frac{(n-m)\pi}{L}x} dx = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ 2L & \text{for } n = m, \end{cases}$$

slik at

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx = c_n.$$

Vi kan utlede formler for overgangen mellom fourierrekker på reell og kompleks form. Substituerer vi $-x$ for x i de Moivres formel får vi

$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx.$$

Vi kan legge dem sammen

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},$$

og trekke dem fra hverandre

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Hvis vi skriver

$$\begin{aligned} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} &= a_n \left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i} \right) \\ &= e^{i\frac{n\pi x}{L}} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) + e^{-i\frac{n\pi x}{L}} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) \end{aligned}$$

og sammenligner vi (2) og (4), ser vi at

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

og

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Vi kan selvfølgelig også snu om på disse formlene, og skrive

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

og

$$b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Merk til slutt at dersom f er reell, er $c_n = \overline{c_{-n}}$.

Eksempel Vi beregner den komplekse fourierrekken til heavisidefunksjonen på $[-1, 1]$. Koeffisientene blir

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } n = 0 \\ \frac{2_1}{n\pi i} & \text{for odde } n \\ 0 & \text{for jevne } n, \end{cases}$$

slik at

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} e^{(2n+1)\pi i x}.$$

Merk at

$$c_n e^{n\pi i x} + c_{-n} e^{-n\pi i x} = \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x,$$

slik at

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} e^{(2n+1)\pi i x} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x.$$

Parsevals identitet

For funksjoner med konvergente fourierrekker gjelder Parsevals identitet

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx.$$

Denne er lettest å bevise om man starter på kompleks form

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}.$$

Vi ganger denne likheten med seg selv

$$f^2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\frac{m\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{-m} e^{i\frac{-m\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_{-m} e^{i\frac{(n-m)\pi x}{L}}$$

og integrerer

$$\int_{-L}^L f^2(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_{-m} \int_{-L}^L e^{i\frac{(n-m)\pi x}{L}} dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{c_{-n}} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Det går lett å vise at

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$