NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

# Eksamensoppgave i **TMA4125 EKSEMPELEKSAMEN - LF**

**Faglig kontakt under eksamen:**

**Tlf:**

**Eksamensdato:** 8.april-5. juni 2019

**Eksamenstid (fra–til):** 00:00 - 24:00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** Kode C: Bestemt, enkel kalkulator, og vedlagte formelark.

**Annen informasjon:**
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes. Valgfritt programmeringsspråk i programmeringsoppgaver. Lykke til.

**Målform/språk:** bokmål

**Antall sider:** 7

**Antall sider vedlegg:** 0

**Kontrollert av:**

| **Informasjon om trykking av eksamensoppgave** | |
|---|---|
| **Originalen er:** | |
| **1-sidig** ☐ | **2-sidig** ☒ |
| **sort/hvit** ☒ | **farger** ☐ |
| **skal ha flervalgskjema** ☐ | |

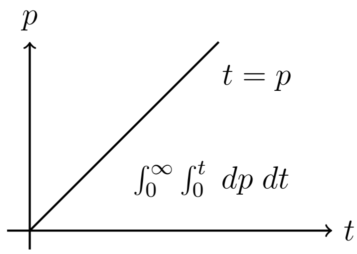
Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

## Oppgave 1

**a)** Vi beregner

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f * g) &= \int_0^\infty \int_0^t f(p)g(t-p)e^{-st}\,dp\,dt = \int_0^\infty \int_p^\infty f(p)g(t-p)e^{-st}\,dt\,dp \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(p)g(u)e^{-s(p+u)}\,du\,dp = \int_0^\infty f(p)e^{-sp} \int_0^\infty g(u)e^{-su}\,du\,dp \\
&= \int_0^\infty f(p)e^{-sp}\,dp \int_0^\infty g(u)e^{-su}\,du = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g).
\end{aligned}$$




**b)** Vi laplacetransformerer, og får

$$(s^2+1)\mathcal{L}(y) = \frac{s}{s^2+1}$$

eller

$$\mathcal{L}(y) = \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}(\cos t)\mathcal{L}(\sin t)$$

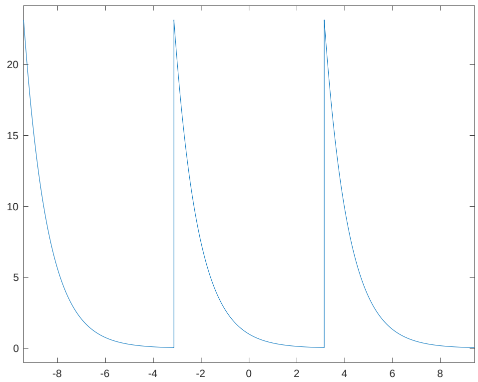
Vi inverstranformerer, og får

$$\begin{aligned}
y = \cos t * \sin t &= \int_0^t \sin(t-p)\cos p\,dp \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \sin t + \sin(t-2p)\,dp = \frac{1}{2} t \sin t
\end{aligned}$$

Merk den snasne bruken av $\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$, med $a = t - p$ og $b = p$.

**Oppgave 2**

**a)** Slik ser den $2\pi$-periodiske utvidelsen til $f$ ut:




Vi beregner fourierkoeffisientene til $f$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi(1+in)}\left(e^{(1+in)\pi} - e^{-(1+in)\pi}\right) = \frac{(-1)^n}{2\pi(1+in)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right),$$

og setter sammen fourierrekken

$$f(x) \sim \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+in}e^{inx}.$$

Merk at den $2\pi$-periodiske utvidelsen til $f$ er ikke kontinuerlig, og i for eksempel $x = \pi$ konvergerer rekken til

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi^-} e^{-x} + \lim_{x\to-\pi^+} e^{-x}\right) = \frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{2}.$$

Vi kan derfor ikke skrive likhetstegn mellom $f$ og fourierrekken.

**b)** Funksjonen $e^{-x}$ er kontinuerlig i $x = 0$, så fourierrekken konvergerer til $f$ her. Dersom vi evaluerer fourierrekken i $x = 0$, får vi

$$1 = f(0) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+in}.$$

Siden

$$\frac{(-1)^n}{1+in} + \frac{(-1)^{-n}}{1-in} = \frac{2(-1)^n}{1+n^2},$$

kan vi skrive

$$\begin{aligned} 1 = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+in} &= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \\ &= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} - \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \\ &= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \end{aligned}$$

slik at

$$\frac{\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

**Oppgave 3** Vi begynner med å fouriertransformere $u$ med hensyn på $x$:

$$\mathcal{F}(u) = \hat{u}(w,t),$$

slik at

$$\mathcal{F}(u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(w,t),$$

og

$$\mathcal{F}(u_{xx}) = -w^2\hat{u}(w,t).$$

Vi skal ikke ta stilling til hvorvidt det går fint å herje slik med $u$ og $\hat{u}$, men det akseptere uten bevis at det går bra. Nå bruker vi relasjonene over i varmelikningen, og skriver

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(w,t) = \mathcal{F}(u_t) = \mathcal{F}(u_{xx}) = -w^2\hat{u}.$$

Denne differensiallikningen klarer vi fint å løse:

$$\hat{u} = g(w)e^{-w^2 t},$$

for en ubestemt funksjon $g$. Dersom vi fouriertransformerer initialkravet

$$\hat{u}(w,0) = \hat{f}(w),$$

ser vi at det er naturlig å sette $g = \hat{f}$, slik at

$$\hat{u} = \hat{f}(w)e^{-w^2 t}.$$

Alt vi trenger å gjøre nå, er å inverstransformere. Siden høyresiden er et produkt av to fouriertransformerte funksjoner, er det naturlig å bruke konvolusjonsteoremet. Vi ser fra tabellen at

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}\right) = e^{-w^2 t},$$

og derfor kan vi skrive

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f(x) * \frac{1}{\sqrt{2t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{\frac{-(x-v)^2}{4t}}\, dv.$$

## Oppgave 4 Matlab:

```
x=pi/4;
z=x+1;
tol = 5*10^(-6);

while abs(x-z) > tol
    z=x;
    x=x-(x-cos(x))/(1+sin(x));
end

disp(x)
```

## Python:

```
import numpy as np

x=np.pi/4
z=x+1
tol = 5*10**(-6)

while np.abs(x-z) > tol:
    z=x
    x=x-(x-np.cos(x))/(1+np.sin(x))


print x
```

Setter man toleransen til $5 \cdot 10^{-6}$ produserer disse programmene tilnærmingen

$$x = 0.739085133215.$$

**Oppgave 5** Vi slår opp i tabellen over Gauss-Legendre-vekter, og regner ut

$$\int_{-1}^{1} \cos x \, dx \approx \sum_{i=1}^{5} A_i \cos x_i$$

$$= \frac{128}{225} + \frac{322 + 13\sqrt{70}}{450} \cos \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}} + \frac{322 - 13\sqrt{70}}{450} \cos \frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$$

Jeg har brukt at $\cos x$ er en jevn funksjon for å spare litt skriving.

**Oppgave 6** Finn en tilnærming til $y(6)$, der

$$y' = -2y \quad y(0) = 1,$$

La $t_k = 1.2k$, $y_0 = y(0) = 1$ og $y_k \approx y(x_k)$. Eulers eksplisitte metode er

$$y_{k+1} = y_k - 2hy_k = (1 - 2h)y_k = (1 - 2h)^k = \left(-\frac{7}{5}\right)^{k+1},$$

som gir $y_5 = -5.378239999999998 \approx y(6)$. Eulers implisitte metode er

$$y_{k+1} = y_k - 2hy_{k+1}$$

eller

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{(1 + 2h)} = \frac{1}{(1 + 2h)^k} = \left(\frac{5}{17}\right)^{k+1}.$$

som gir $y_5 = 0.002200925867887 \approx y(6)$. Den analytiske løsningen på problemet er $y(t) = e^{-2t}$. Siden

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

bør en numerisk metode for det samme problemet også gjøre det. For Eulers eksplisitte metode har vi

$$\lim_{k \to \infty} |y_k| = \infty$$

mens for Eulers implisitte metode, har vi

$$\lim_{k \to \infty} y_k = 0.$$

Med andre ord er det sistnevnte som oppfører seg kvalitativt riktig.

**Oppgave 7**

**a)** Vi gitrer opp $x$-aksen med gitteravstand $h$, og $t$-aksen med gitteravstand $k$. Et typisk gitterpunkt blir $(x_i, t_j) = (ih, jk)$, og vi skriver

$$u_{ij} \approx u(x_i, t_j).$$

Setter vi inn approksimasjonene

$$u_t(x_i, t_{j+1}) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k}$$

og

$$u_{xx}(x_i, t_{j+1}) \approx \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2},$$

inn i varmelikningen, får vi det implisitte skjemaet:

$$u_{i,j+1} - \frac{k}{h^2}\left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}\right) = u_{ij}.$$

La oss si at vi har $n+1$ gitterpunkter på $[0,1]$, der $x_0 = 0$ og $x_n = 1$. Hvis vi nå antar at $u_{i,j}$ er beregnet for alle $i$, $1 \le i \le n-1$, har vi $n-1$ likninger for de $n-1$ foreløpig ukjente tilnærmingene på neste tidssteg, $u_{i,j+1}$. Den første likningen blir

$$u_{1,j+1} - \frac{k}{h^2}\left(u_{2,j+1} - 2u_{1,j+1}\right) = u_{1j}.$$

siden randbetingelsene gir $u_{0,j+1} = 0$. I den siste likningen skjer det samme, og vi får

$$u_{n-1,j+1} - \frac{k}{h^2}\left(u_{n-2,j+1} - 2u_{n-1,j+1}\right) = u_{n-1,j}.$$

Dersom vi organiserer approksimasjonene som en vektor på hvert tidssteg

$$\mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{n-1,j} \end{pmatrix}$$

kan vi sette opp likningssystemet på matriseform som

$$A\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\frac{k}{h^2} & -\frac{k}{h^2} & & & & \\ -\frac{k}{h^2} & 1+2\frac{k}{h^2} & -\frac{k}{h^2} & & & \\ & -\frac{k}{h^2} & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{k}{h^2} & \\ & & & -\frac{k}{h^2} & 1+2\frac{k}{h^2} & -\frac{k}{h^2} \\ & & & & -\frac{k}{h^2} & 1+2\frac{k}{h^2} \end{bmatrix}$$

## b) Matlab:

```
n=10;    h=1/n;
m=100;  k=1/m;
r=k/h^2;

x=0:h:1;
u=zeros(n+1,m+1);
u(:,1)=x.*(1-x);

A=(1+2*r)*diag(ones(n-1,1))-r*diag(ones(n-2,1),1)-r*diag(ones(n-2,1),-1);

for j=1:m
       u(2:n,j+1)=A\u(2:n,j);
end
```

## Python:

```
import numpy as np

n=5.0
h=1/n
m=100.0
k=1/m
r=k/h**2

x=np.linspace(0,1,n+1)
u=np.zeros((int(n)+1,int(m)+1))
u[np.arange(int(n)+1),0]=x*(1-x)

A=(1+2*r)*np.diag(np.ones(int(n-1)),0)- '\n' ...
    r*np.diag(np.ones(int(n-2)),1)-r*np.diag(np.ones(int(n-2)),-1);

for j in range(int(m)):
    u[np.arange(int(n)-1)+1,j+1]=np.linalg.solve(A,u[np.arange(int(n)-1)+1,j])
```