Øving 7 - Varmelikningen

Obligatoriske oppgaver

$\boxed{1}$ Vis at løsningen av varmelikningen på hele x-aksen

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

med initialkrav

$$u(x,0) = f(x)$$

er gitt ved

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}}\, dv.$$

$\boxed{2}$ Løs varmelikningen

$$u_t = u_{xx}$$

med randkrav

$$u(0,t) = u(2,t) = 0$$

og initialkrav

a) $u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2}$

b) $u(x,0) = \begin{cases} x & \text{for} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{for} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$

$\boxed{3}$ Lag en animasjon av løsningen av oppgave 2a.

$\boxed{4}$ Anta at du har en kvadratisk tynn plate med sidekant 24, som ligger i første kvadrant i xy-planet, med ett hjørne i origo. Temperaturen $u(x,y)$, som vi antar å ikke endres med tiden, holdes konstant lik 0 på den sidekanten som ligger på x-aksen, og konstant lik $\cos\frac{\pi x}{6}$ på sidekanten som ligger på linjen $y = 24$. De to ande sidekantene er perfekt isolert, og det er ingen varmeflyt ut av platens overflate, kun ut øvre og nedre sidekant. Finn temperaturen $u(x,y)$.

$\boxed{5}$ Lag et surfplot av løsningen av oppgave 4.

Anbefalte oppgaver

$\boxed{1}$ En av de enkleste variantene av Schrödingers likning er:

$$u_t = iu_{xx}$$

Løs likningen på hele x-aksen med initialkrav

$$u(x,0) = g(x).$$

$\boxed{2}$ I denne oppgaven skal vi bruke fouriertransform til å løse Laplaces likning i halvplanet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{for } -\infty < x < \infty \text{ og } y > 0,$$

med randkrav

$$u(x,0) = f(x) \tag{1}$$
$$\lim_{x\to\infty} u(x,y) = 0 \tag{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} u(x,y) = 0 \tag{3}$$
$$\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0. \tag{4}$$

a) La $\hat{u}(w,y) = \mathcal{F}(u)(w,y)$ være fouriertransformen til u med hensyn på x. Vis at denne tilfreds-stiller

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} - w^2 \hat{u} = 0.$$

b) Bruk forrige deloppgave og randkravet (4) til å vise at

$$\hat{u}(w,y) = C(w)e^{-|w|y}.$$

c) Bruk randkrav (1) til å finne $C(w)$.

d) Bruk invers fouriertransform til å vise at

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-|w|y} e^{iwx} \, \mathrm{d}w.$$

e) Bruk konvolusjonsteoremet til å vise at

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{2y}{(x-t)^2 + y^2} \, \mathrm{d}t.$$