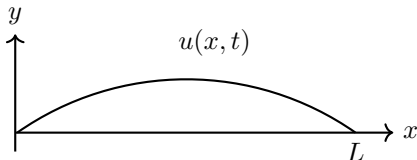


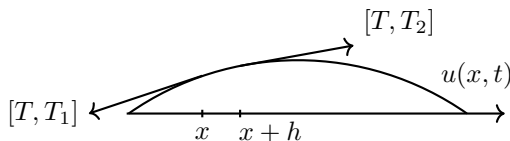
Bølgelikningen er en matematisk beskrivelse av en vibrerende streng, eller en stående luftbølge i en orgelpipe. Vi skal ta for oss selve likningen, hvor den kommer fra, og to forskjellige løsningsteknikker - en for et intervall på x -aksen, og en for hele x -aksen.

Utledning

Vi tenker at vi har en vibrerende streng som er spent opp i $x = 0$ og $x = L$. La $u(x, t)$ være en funksjon som for hvert tidspunkt t og hvert punkt x beskriver utslaget fra likevektslinjen, som ligger langs x -aksen. Strengen har konstant massetetthet ρ [kg/m].



Vi tar en nærmere titt på strekkraftene på et lite stykke av strengen. Vi antar at tyngdekraften er neglisjerbar, og at strengen er helt elastisk, slik at strengestrekking, som virker parallelt med strengen, er eneste kraft. Vi antar at hvert punkt på strengen kun beveger seg loddrett, og at den horisontale komponenten av strengestrekking er konstant lik T .



Vi setter opp Newtons andre lov for den lille biten fra x til $x + h$. Massen til en bit med lengde h er $h\rho$, og akselerasjonen til strengen i punktet x er $u_{tt}(x, t)$. Netto kraft på biten er gitt ved $T_2 + T_1$, slik at

$$h\rho u_{tt}(x, t) = T_2 + T_1,$$

eller

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{T} u_{tt}(x, t) &= \frac{T_2/T + T_1/T}{h} \\ &= \frac{u_x(x+h, t) - u_x(x, t)}{h}, \end{aligned}$$

siden stigningstallet til tangenten til strengen er gitt ved u_x . Lar vi nå $h \rightarrow 0$, får vi bølgelikningen

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t),$$

der $c^2 = \frac{T}{\rho}$.

Oppstilling av problem

Det er ikke nok med en differensiallikning som beskriver strengens bevegelse. Vi må også ha informasjon om hvordan bevegelsen blir satt igang, og hvor strengen er spent opp. Et fullstendig oppstilt problem er:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad (4.1)$$

med randkrav

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (4.2)$$

og initialkrav

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x). \quad (4.3)$$

Selve differensiallikningen (4.1) forteller oss hva slags fysiske lover som skal tilfredsstilles (i dette tilfelle Newtons andre lov), eller hva slags oppførsel vi kan forvente av løsningen, for eksempel at det er en vibrerende streng det er snakk om. Randkravene (4.2) forteller oss at strengen er spent opp i $x = 0$ og $x = L$, slik at løsningen står helt i ro der. Initialkravene (4.3) forteller oss noen om hvordan bevegelsen settes i gang; f angir strengens posisjon ved $t = 0$, mens g angir strengens fart ved $t = 0$. Når man spiller en tone på en gitar ved å dra i strengen og slippe den, slik man vanligvis gjør, er $g = 0$. Randkravene

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (4.4)$$

kalles *dirichletrandkrav*.

Løsning på intervall - separasjon av variable

Et stort geni har engang tenkt at løsningen på bølgelikningen kan skrives

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

Han hadde rett. Innsetting i (4.1) gir

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t).$$

Vi deler på $c^2 F(x)G(t)$ og får

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}.$$

Siden x og t skal kunne varieres uavhengig av hverandre, må vi ha at

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = k$$

der k er en foreløbig ubestemt konstant. Vi ganger opp med $c^2 F(x)G(t)$ og bytter fortegn på k , slik at

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

og

$$G''(t) + kc^2 G(t) = 0.$$

Vi skal først prøve å finne ut hva k kan være. Vi kan bruke F og randkravene

$$u(0, t) = u(L, t) = 0,$$

til dette. La oss kikke på

$$F''(x) + kF(x) = 0.$$

Dersom $k = 0$, får vi

$$F''(x) = 0$$

som gir

$$F(x) = Ax + B.$$

Er dette en interessant løsning? Vel, nei. Dersom

$$F(0)G(t) = u(0, t) = 0,$$

må enten $F(0) = 0$ eller $G(t) = 0$. At $G(t) = 0$, slik at $u(x, t) = 0$, er en gyldig løsning av bølgelikningen, som også tilfredsstiller randkravene. Men dette er åpenbart ikke en spesielt interessant løsning, så jeg tror vi går for $F(0) = 0$, som impliserer $B = 0$. Det andre randkravet

$$u(L, t) = 0$$

gir likeledes at $F(L) = 0$, altså at $AL = 0$, som impliserer at $A = 0$. Dette impliserer igjen at $u(x, t) = 0$, vi konkluderer at $k = 0$ og $F(x) = 0$ ikke er en interessant løsning av problemet.

La oss prøve $k < 0$. I så fall løses

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

av

$$F(x) = Ae^{\sqrt{-k}x} + Be^{-\sqrt{-k}x}$$

Dersom vi nå bruker randkravene, får vi de to likningene

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ Ae^{\sqrt{-k}L} + Be^{-\sqrt{-k}L} &= 0 \end{aligned}$$

Dersom $k \neq 0$ (som vi jo allerede vet), er determinanten til dette systemet gitt ved

$$e^{\sqrt{-k}L} + e^{-\sqrt{-k}L} \neq 0$$

og vi konkluderer med at $A = B = 0$, slik at $F(x) = 0$. Altså er heller ikke $k < 0$ en interessant løsning.

Dersom $k > 0$, går alt så meget bedre, og vi får

$$F(x) = A \cos \sqrt{k}x + B \sin \sqrt{k}x.$$

Bruker vi randkravet $u(x, t) = 0$, får vi

$$A = 0,$$

og krever vi

$$F(L) = B \sin(\sqrt{k}L)G(t) = 0,$$

kan dette oppnås ved å sette $B = 0$, som er uinteressant siden da blir $u(x, t) = 0$, eller ved å kreve

$$\sqrt{k}L = n\pi.$$

slik at

$$k = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Vi ser også at $n > 0$, for dersom $n < 0$ byttes bare fortegnet på B , som ennå er ubestemt. Ved å ta en titt på det endelige løsningen av problemet nedenfor, ser man at B kommer til å bli overflødig, så vi velger $B = 1$.

Ligningene

$$G''(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G(t) = 0.$$

løses av

$$G_n(t) = A_n \cos c \frac{n\pi}{L} t + B_n \sin c \frac{n\pi}{L} t,$$

så de generelle løsningene til bølgelikningen med randkrav (4.2) blir

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= F(x)G_n(t) \\ &= \left(A_n \cos c \frac{n\pi}{L} t + B_n \sin c \frac{n\pi}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x. \end{aligned}$$

Vi har ennå ikke tatt stilling til initialkravene (4.3). Det kan vi klare ved å skrive

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos c \frac{n\pi}{L} t + B_n \sin c \frac{n\pi}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x. \end{aligned}$$

Dersom vi nå krever

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

ser vi at summen til høyre bør være fourierrekken til den odde utvidelsen til f , og følgelig bør

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx.$$

På samme vis, dersom

$$g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c \frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

bør summen til høyre være fourierrekken til den odde utvidelsen til g , og følgelig må

$$B_n c \frac{n\pi}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx.$$

slik at

$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx.$$

Vi oppsummerer i et teorem.

Teorem 4.1. *Bølgelikningen*

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t),$$

med randkrav

$$u(0, t) = u(L, t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

løses av

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos c \frac{n\pi}{L} t + B_n \sin c \frac{n\pi}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

der

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

og

$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx.$$

Løsning for fløyte

En stående trykkløse inne i fløyte, beskrives av problemet

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t),$$

med randkrav

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

Konstanten c avhenger nå av trykket og lydhastigheten i mediet der lydbølgene produseres. (Dersom du spiller på fløyten inni en gassballong full av helium, blir c høyere enn i luft.) Randkravene kalles *von-Neumann-randkrav*, og L er lengden på fløyten.

Vi løser problemet på samme måte som for den vibrerende strengen. Den eneste forskjellen blir i forbindelse med løsning av

$$F''(x) + kF(x) = 0.$$

På samme vis må $k > 0$, slik at

$$F(x) = A \cos \sqrt{k}x + B \sin \sqrt{k}x.$$

Siden

$$F'(x) = -A\sqrt{k} \sin \sqrt{k}x + B\sqrt{k} \cos \sqrt{k}x$$

impliserer

$$u_x(0, t) = F'(0) = 0,$$

at $B = 0$, mens

$$u_x(L, t) = F'(L) = -A\sqrt{k} \sin \sqrt{k}L = 0,$$

gir som før at

$$\sqrt{k}L = n\pi.$$

Merk at $n = 0$ er en gyldig løsning her siden en konstant funksjon løser både bølgekligningen og von-Neumann-randkravene. Resten blir som før, men vi må bruke cosinusrekken til f og g istedet for sinusrekken. Vi tar ikke resten av regningen, men oppsummerer med et teorem.

Teorem 4.2. Bølgekligningen

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t),$$

med randkrav

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

løses av

$$u(x, t) =$$

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos c \frac{n\pi}{L} t + B_n \sin c \frac{n\pi}{L} t \right) \cos \frac{n\pi}{L} x,$$

der A er en vilkårlig konstant,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

og

$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx.$$

Løsning på hele x -aksen - D'Alembert

Hvis man ikke ønsker å bruke bølgekligningen til å beskrive en oppspennet streng, men heller bølgene fra et steinkast på et endimensjonalt og uendelig langt hav, må man studere bølgekligningen

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t),$$

med initialkrav

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

og ingen randkrav. Her skal løsningen gjelde for alle x , ikke bare på intervallet $[0, L]$

I noen tilfeller kan dette gjøre alt vanskeligere, men akkurat i tilfellet bølgekligningen, blir alt fryktelig enkelt. Det er enkelt å sjekke at funksjonen

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

passer i likningen

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t).$$

uansett hva ϕ og ψ er, så lenge de er to ganger kontinuerlig deriverbare. Spørsmålet blir bare da hvordan vi skal klare å innpasse initialkravene.

Dersom man bruker

$$u(x, 0) = f(x)$$

får man

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

og dersom man bruker

$$u_t(x, 0) = g(x),$$

får man

$$c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x),$$

eller

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c} \int^x g(t) dt + C$$

Vi har nå et lineært 2×2 -likningssystem for ϕ og ψ .
Legger vi likningene sammen, får vi

$$2\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c} \int^x g(t) dt + C$$

og trekker vi dem fra hverandre, får vi

$$2\psi(x) = f(x) - \frac{1}{c} \int^x g(t) dt - C$$

Vi setter nå alt sammen igjen

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) \\ &\quad + \frac{1}{2c} \left(\int^{x+ct} g(t) dt - \int^{x-ct} g(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(t) dt, \end{aligned}$$

og oppsummerer i et teorem.

Teorem 4.3. *Bølgeligningen*

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t),$$

på hele x -aksen, med initialkrav

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

løses av

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(t) dt.$$