**Norges teknisk–**
**naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Elise Klaveness tlf. 73 55 02 39

# EKSAMEN I SIF5013/16 MATEMATIKK 4N OG SIF5017 MATEMATIKK 4D

Torsdag 2. august 2001
Kl. 9–14

Hjelpemidler – B2:
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste
Rottman: *Matematisk formelsamling*
Vedlegg: Formelark

Sensurfrist: 1. september

*Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.*

## Oppgave 1

**a)** Finn den Laplacetransformerte $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ og den inverse Laplacetransformerte $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ for funksjonene

$$f(t) = \sin t + t\cos t \qquad \text{og} \qquad G(s) = \frac{s}{s^2+1}\left[1 - e^{-2\pi s}\right].$$

**b)** Finn $y(t)$ for $t > 0$ ved hjelp av Laplacetransformasjon når

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau = r(t), \qquad y(0) = 0, \qquad r(t) = \begin{cases} 2\cos t & \text{for } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{for } t > 2\pi. \end{cases}$$

**c)** Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 4y' + 8y = 2\delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

der $\delta(t - 2\pi)$ er Diracs deltafunksjon.

**Oppgave 2**
Gitt

(i) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi$$

(ii) $$u(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

**a)** Avgjør (ved innsetting) hvilke(n) av følgende funksjoner

$$\begin{array}{ll} u(x,y) = y, & u(x,y) = \sin nx \sinh ny \\ u(x,y) = xy, & u(x,y) = \cos nx \sinh ny \end{array} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

som oppfyller (i), (ii) og

(iii) $$u_x(0,y) = 0, \qquad u_x(\pi,y) = 0 \qquad \text{for } 0 < y < \pi.$$

Finn en funksjon $u(x,y)$ som oppfyller (i), (ii), (iii) og

(iv) $$u(x,\pi) = 1 - \cos 2x\,, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

**b)** Finn alle funksjoner på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ som oppfyller (i), (ii) og

(v) $$u(0,y) = 0, \qquad u_x(\pi,y) = 0 \qquad \text{for } 0 < y < \pi.$$

**Oppgave 3**
Det oppgis at funksjonen $f(x) = \sin^2 x$ for $0 \le x \le \pi$ har Fouriersinusrekke

$(*)$ $$-\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin{(2m+1)x}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}.$$

Skisser grafen til summen av rekka $(*)$ for $-2\pi \le x \le 2\pi$. Bruk $(*)$ til å finne summen av rekka

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}.$$

**Oppgave 4**
Bruk Fouriertransformasjon til å finne $f(x)$ når

$$f(x) = e^{-|x|} - 4\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-|x-p|}\,dp.$$

Oppgitt Fouriertransformert: $\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+w^2} \qquad (a > 0)$

**Oppgave 5**
Vi skal se på numeriske løsninger av den ordinære differensialligningen

$$x' = f(x,t) = -2x + 8t + 4, \quad x(0) = 1.$$

Den eksakte løsningen er $x(t) = e^{-2t} + 4t$.

**a)** Beregn numeriske tilnærmelser til $x(0.1)$ og $x(0.2)$ ved Eulers metode. Velg $h = 0.1$.

**b)** Beregn en numerisk tilnærmelse til $x(0.1)$ ved Heuns metode. Velg $h = 0.1$.

Sammenlign de numeriske løsningene av de to metodene med den eksakte løsningen for $x(0.1)$. Hvilken metode gir best tilnærmelse?

**Oppgave 6**

**a)** For å approksimere integralet

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx$$

kan man bruke trapesmetoden

$$T_n = \frac{h}{2}f(0) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(\frac{i}{n}) + \frac{h}{2}f(1)$$

eller midtpunktmetoden

$$U_n = h\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i-1/2}{n})$$

I begge tilfeller er $h = \frac{1}{n}$.

Vis formelen $T_{2n} = \frac{1}{2}(T_n + U_n)$.

**b)** For et spesielt valg av $f(x)$ har vi oppgitt tabellen

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_n$ | 0.707106 | 0.587937 | 0.522431 | 0.509019 | 0.505881 | 0.505110 |

og dessuten at $f(0) = f(1) = 0$.

Bruk dette, samt resultatet fra **a)** til å bestemme $T_{64}$.

Vi oppgir nå at eksakt svar er $I = 0.5048545\ldots$.

Beregn størrelsen

$$S = T_{64} + \frac{T_{64} - T_{32}}{3}$$

og sammenlign med det eksakte svaret. Forklar hvorfor $|S - I|$ er mindre enn $|T_{64} - I|$, dvs at $S$ er en bedre tilnærmelse enn $T_{64}$.