Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Yurii Lyubarskii   tlf. 735 93526

EKSAMEN I SIF5013/16 MATEMATIKK 4N
OG SIF5017 MATEMATIKK 4D
Lørdag 3. august 2002
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*
Vedlegg: Formelark i numerikk

Sensurdato: 2. september

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1
La u betegne stepfunksjonen (Heavisidefunksjonen)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0, \\ 1 & \text{for } t > 0. \end{cases}$$

a) La a og b være konstanter, $b \geq 0$. Finn den Laplacetransformerte til funksjonen

$$f(t) = e^{at} u(t-b).$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 2y' + y = e^t u(t-1) \qquad \text{for } t > 0,$$

når initialbetingelsene er $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

c) Finn konvolusjonen $f * f$, der f er gitt under punkt a).

Oppgave 2
Funksjonen $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = x \cos x \quad \text{for } -\pi \leq x < \pi, \qquad f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{for alle } x.$$

La b_n for $n = 1, 2, 3, \ldots$ betegne Fouriersinuskoeffisientene til $f(x)$.

Beregn koeffisienten b_1.   (Hint: $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$.)

Det oppgis at for $n \neq 1$ er

$$b_n = (-1)^n \frac{2n}{n^2 - 1}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Skriv opp Fourierrekka til $f(x)$, og bruk den til å finne summen av rekka

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin n}{n^2 - 1}.$$

Oppgave 3
I området $t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ er det gitt et randverdiproblem

(1) $$u_{xx} = u_{tt} - u,$$

(2) $$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0.$$

a) Bestem alle funksjoner av typen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller (1) og (2).

b) Skriv opp en løsning av (1) og (2) på rekkeform, og bestem den løsningen som tilfredssti
initialbetingelsene

$$u(x, 0) = 1 + \cos \pi x, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$
$$u_t(x, 0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Oppgave 4
Funksjonen $f(x)$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x < 1, \\ 2 & \text{for } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Regn ut den Fouriertransformerte $\widehat{f}(w) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$. Finn verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixw} + e^{i(x-1)w} - 2e^{i(x-2)w}}{w} \, dw$$

for en vilkårlig x i det åpne intervallet $(1, 2)$. Bruk resultatet til å finne verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3 \sin \frac{1}{2} w + \sin \frac{3}{2} w}{w} \, dw \, .$$

Oppgave 5

a) Bruk både Lagranges og Newtons interpolasjonsmetoder til å finne tredjegradspolynomet $p(x)$ som oppfyller

$$p(-2) = -5, \quad p(-1) = 0, \quad p(0) = 1, \quad p(1) = 4.$$

Merk at begge fremgangsmåtene skal vises.

b) La $p(x)$ være polynomet i **a)**. Bruk Simpsons regel med nodene -1, 0, 1 til å beregne integralet

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx.$$

Hvor stor blir feilen ved bruk av Simpsons regel i dette tilfellet?

Oppgave 6 Eulers metode (eksplisitt metode) for varmeledningsligningen.

Gitt

$$(*) \begin{cases} u_t = u_{xx} & t \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,0) = 2\sin \pi x & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

a) Bruk gitteret (x_i, t_j) med $i = 0, \ldots, n$ og $j = 0, 1, 2, \ldots$, hvor $x_i = i \cdot h$, $h = 1/n$, og $t_j = j \cdot k$. Sett opp en formel for å finne en numerisk approksimasjon U_i^{j+1} til løsningen u av $(*)$ i punktet (x_i, t_{j+1}) med Eulers metode.

Bruk: $u_t(x,t) \approx \big(u(x, t+k) - u(x,t)\big)/k$ og
$u_{xx}(x,t) \approx \big(u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\big)/h^2$.

b) Sett $n = 4$, $h = 1/4$, $k = 0.03$ og beregn $[U_1^1, U_2^1, U_3^1]^T$ fra de kjente verdiene $[U_1^0, U_2^0, U_3^0]^T$.