



Faglig kontakt under eksamen:
Harald E. Krogstad 73 59 35 26

EKSAMEN I FAG SIF5013/14 MATEMATIKK 4N

Fredag 6. august 1999

Tid: 0900-1400

Tillatte hjelpemidler: B2

- Typegodkjent lommekalkulator, med tomt minne.
- Rottmann: *Matematisk Formelsamling*.
- Formelliste vedlagt dette eksamenssettet.

Sensuren faller i uke 34.

Oppgave 1 Bruk potensrekkeметoden til å finne løsningen av

$$(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$$

når $y(0) = y'(0) = 1$.

(Svaret er et polynom!)

Oppgave 2

a) Den Laplacetransformerte av funksjonen $f(t)$ er

$$F(s) = \frac{as + b}{(s + 2)^2 + 4},$$

der a og b er konstanter. Finn $f(t)$.

b) Funksjonen $g(t)$ har Laplacetransform

$$\frac{s^2 + 4s + 8}{s^3} e^{-2s}.$$

Bruk dette og resultatet fra (a) til å løse differensialligningen

$$y'' + 4y' + 8y = g(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Oppgave 3 En uendelig lang stav ligger langs x -aksen fra $-\infty$ til ∞ . Varmeledningsligningen for staven har formen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \quad (*)$$

der κ er en positiv konstant.

a) Bestem funksjonen $h(t)$ slik at $u(x, t) = h(t) \sin(ax)$ tilfredsstiller (*) og oppfyller startbetingelsen $u(x, 0) = \sin(ax)$.

b) Forklar hvordan en kan bruke fourierrekker til å finne temperaturen i staven for $t > 0$ hvis temperaturen er en periodisk funksjon for $t = 0$, og bestem spesielt temperaturen i staven hvis temperaturen ved $t = 0$ er en odde funksjon med periode 2π definert ved

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Oppgave 4 Et filter $f \xrightarrow{T} g$ er definert ved

$$f(t) \longrightarrow g(t) = T(f) = f(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (t - \tau)^2} f(\tau) d\tau$$

a) Vis at filteret T er lineært og har transferfunksjon $1 + e^{-|\omega|}$.

b) Bestem funksjonen f hvis funksjonen $g = T(f)$ har fouriertransformen

$$\hat{g}(\omega) = i\omega(1 + e^{-|\omega|})e^{-\omega^2/2}.$$

Oppgave 5

a) Sett opp dividert differansetabell for datasettet

| | | | | |
|----------|----|----|---|---|
| k | 0 | 1 | 2 | 3 |
| x_k | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x_k)$ | -4 | -1 | 0 | 5 |

og bestem interpolasjonspolynomet $p(x)$ av grad 3.

b) La $q(x)$ være et 4. gradspolynom som interpolerer datasettet i (a). Bestem $q(x)$ når du i tillegg krever at $q^{(4)}(x) = 24$.

Oppgave 6 La $x(t)$ være en funksjon som tilfredsstiller differensialligningen

$$x'' = \cos(x), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

(a) Ved å innføre passende nye variable, omskriv ligningen til et system av første ordens differensialligninger.

(b) Finn en approksimasjon til $x(0.2)$ ved å ta to skritt med andre ordens Runge-Kutta metode (forbedret Eulers metode) og skrittlengde $h = 0.1$.