Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald E. Krogstad 73 59 35 26

EKSAMEN I FAG SIF5013/14 MATEMATIKK 4N

Fredag 6. august 1999
Tid: 0900-1400

Tillatte hjelpemidler: B2
- Typegodkjent lommekalkulator, med tomt minne.
- Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*
- Formelliste vedlagt dette eksamensettet.

Sensuren faller i uke 34.

Oppgave 1 Bruk potensrekkemetoden til å finne løsningen av

$$(1+x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$$

når $y(0) = y'(0) = 1$.

(Svaret er et polynom!)

Oppgave 2

a) Den Laplacetransformerte av funksjonen $f(t)$ er

$$F(s) = \frac{as+b}{(s+2)^2+4},$$

der a og b er konstanter. Finn $f(t)$.

b) Funksjonen $g(t)$ har Laplacetransform

$$\frac{s^2+4s+8}{s^3}e^{-2s}.$$

Bruk dette og resultatet fra (a) til å løse differensialligningen

$$y'' + 4y' + 8y = g(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Oppgave 3 En uendelig lang stav ligger langs x-aksen fra $-\infty$ til ∞. Varmeledningsligningen for staven har formen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \qquad (*)$$

der κ er en positiv konstant.

a) Bestem funksjonen $h(t)$ slik at $u(x,t) = h(t)\sin(ax)$ tilfredsstiller (*) og oppfyller startbetingelsen $u(x,0) = \sin(ax)$.

b) Forklar hvordan en kan bruke fourierrekker til å finne temperaturen i staven for $t > 0$ hvis temperaturen er en periodisk funksjon for $t = 0$, og bestem spesielt temperaturen i staven hvis temperaturen ved $t = 0$ er en odde funksjon med periode 2π definert ved

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Oppgave 4 Et filter $f \xrightarrow{T} g$ er definert ved

$$f(t) \longrightarrow g(t) = T(f) = f(t) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(t-\tau)^2} f(\tau)d\tau$$

a) Vis at filteret T er lineært og har transferfunksjon $1 + e^{|\omega|}$.

b) Bestem funksjonen f hvis funksjonen $g = T(f)$ har fouriertransformen

$$\hat{g}(\omega) = i\omega(1 + e^{-|\omega|})e^{-\omega^2/2}.$$

Oppgave 5

a) Sett opp dividert differansetabell for datasettet

k	0	1	2	3
x_k	-1	0	1	2
$f(x_k)$	-4	-1	0	5

og bestem interpolasjonspolynomet $p(x)$ av grad 3.

b) La $q(x)$ være et 4. gradspolynom som interpolerer datasettet i (a). Bestem $q(x)$ når du i tillegg krever at $q^{(4)}(x) = 24$.

Oppgave 6 La $x(t)$ være en funksjon som tilfredsstiller differensialligningen

$$x'' = \cos(x), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

(a) Ved å innføre passende nye variable, omskriv ligningen til et system av første ordens differensialligninger.

(b) Finn en approksimasjon til $x(0.2)$ ved å ta to skritt med andre ordens Runge-Kutta metode (forbedret Eulers metode) og skrittlengde $h = 0.1$.