Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68

EKSAMEN I SIF5013 MATEMATIKK 4N

Bokmål
Mandag 15. mai 2000
Kl. 9–14

Hjelpemidler – B2:
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste
Rottman: *Matematisk formelsamling*
Vedlegg: Formelark

Sensuren faller i uke 23.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.

Oppgave 1

a) Finn den Laplacetransformerte $G(s) = \mathcal{L}(g)$ og den inverse Laplacetransformerte $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H)$ for funksjonene

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < \pi \\ t - \pi & \text{for } t > \pi \end{cases} \qquad \text{og} \qquad H(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}.$$

b) Løs integralligningen

$$y(t) + \int_0^t \tau y(t-\tau)\, d\tau = g(t), \qquad t \ge 0,$$

der $g(t)$ er gitt i **a)**.

c) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Oppgave 2

a) Funksjonen $f(x)$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < x < \pi/2, \\ 0 & \text{for } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

Tegn 2 perioder (fra -2π til 2π) av grafen til den jevne, 2π-periodiske utvidelsen av $f(x)$, og finn Fouriercosinusrekka til $f(x)$.

b) Gitt en partiell differensialligning (1) med randbetingelser (2):

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u + \frac{\partial u}{\partial t}$$

(2) $$u_x(0,t) = 0 \quad \text{og} \quad u_x(\pi,t) = 0 \quad \text{for } t > 0.$$

Finn alle løsninger av (1) på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller (2).

c) Finn en (formell) løsning av (1) som, i tillegg til (2), oppfyller initialbetingelsen

(3) $$u(x,0) = f(x) \qquad \text{for } 0 \le x \le \pi,$$

der $f(x)$ er funksjonen gitt i **a)**.

Finn også en løsning av (1) som oppfyller (2) og initialbetingelsen

(3′) $$u(x,0) = 2\cos x \cdot \cos 2x.$$

Oppgave 3

a) Det oppgis at den 2π-periodiske funksjonen $f(x)$, som for $-\pi < x < \pi$ er gitt ved $f(x) = e^x$, har Fourierrekke

$$\frac{2\sinh \pi}{\pi}\Big[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n \sin nx)\Big].$$

Finn summen av rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

b) Det oppgis at den Fouriertransformerte $\widehat{f}(w) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx$ av

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad \text{er} \qquad \widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos(\pi w/2)}{1-w^2}.$$

Bruk den inverse Fouriertransformasjonen til å finne verdien av integralene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi w/2)}{1-w^2}\,dw \qquad \text{og} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi w/2)}{1-w^2}\,dw.$$

Oppgave 4 Finn interpolasjonspolynomet $p(x)$ til datasettet

x	0	$\pi/2$	π
$\sin(x)$	0	1	0

Finn en øvre skranke for feilen $|\sin(x) - p(x)|$ for $0 \leq x \leq \pi$.

Oppgave 5 Finn en tilnærmelse til integralet

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)\, dx$$

ved bruk av trapesmetoden med steglengde $h = \pi/8$. Hvor liten må steglengden velges, hvis feilen skal bli mindre enn 10^{-4}?

Oppgave 6 Gitt et andre ordens system (masse–fjær modell)

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) - d x_1' \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 - d x_2' \end{aligned}$$

hvor m_i, k_i og d er konstanter. Startbetingelsene velges som

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Skriv om systemet til et første ordens system! Hva blir startbetingelsene for dette første ordens systemet?

Oppgave 7 Utfør ett steg med Heuns metode for Lotka–Volterra systemet (populasjonsmodell)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_1 y_2 \\ y_2' &= y_1 y_2 - y_2 \end{aligned}$$

med steglengde $h = 0.1$ og startbetingelse

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$