



EKSAMEN I SIF5013 MATEMATIKK 4N
Bokmål
Onsdag 16. mai 2001
Kl. 9–14

Hjelpemidler – B2:

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Vedlegg: Formelark

Sensuren faller i uke 23.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.

Oppgave 1

For strømmen $i(t)$ i en viss strømkrets gjelder

$$i'(t) + 4i(t) + 3 \int_0^t i(\tau) d\tau = v(t), \quad i(0) = 0,$$

der $v(t)$ er påtrykt spenning.

a) La $I(s)$ og $V(s)$ betegne de Laplacetransformerte av $i(t)$ og $v(t)$. Vis at

$$I(s) = \frac{s}{(s+1)(s+3)} V(s)$$

og finn $i(t)$ dersom $V(s) = 6/s$.

b) Finn $i(t)$ dersom

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 2, \\ e^{-2t} & \text{for } t > 2. \end{cases}$$

Oppgave 2

Finn funksjonen $f(t)$ for $t \geq 0$ dersom

$$\int_0^t f(\tau) e^{a(t-\tau)} d\tau = \sin t$$

og a er en vilkårlig konstant.

Oppgave 3

En odde 2π -periodisk funksjon $f(x)$ er for $0 \leq x \leq \pi$ gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{for } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 0 & \text{for } \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Det blir oppgitt at for $n \neq 2$ er Fouriersinuskoeffisienten b_n til $f(x)$ gitt ved

$$b_n = -\frac{4}{\pi} \frac{\sin(n\pi/2)}{(n-2)(n+2)}, \quad n \neq 2.$$

a) Skisser grafen til $f(x)$ på intervallet $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

Beregn koeffisienten b_2 og skriv opp Fourierrekka til $f(x)$.

b) Bruk Fourierrekka til $f(x)$ til å finne summen av rekkene

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2m+3)} \quad \text{og} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2(2m+3)^2}.$$

Oppgave 4

Gitt randverdi problemet

$$(i) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$(ii) \quad u_x(0, y) = 0, \quad u_x(\pi, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

a) Vis at alle løsninger av (i) som er av formen $u(x, y) = F(x)G(y)$ og som oppfyller (ii) er gitt ved

$$u_0(x, y) = A_0 y \quad \text{og} \quad u_n(x, y) = A_n \cos nx \sinh ny$$

der $n = 1, 2, 3, \dots$ og A_0, A_1, A_2, \dots er vilkårlige konstanter.

b) Finn en løsning av (i) som oppfyller randbetingelsene (ii) og

$$(iii) \quad u(x, \pi) = 1 - 2 \cos 2x + \cos 4x.$$

Oppgave 5

Gitt den ordinære differensialligningen

$$x'' = x^2 e^t + x',$$

med initialverdier

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Det er oppgitt at $x(0.1) = 1.2165$.

- a) Skriv denne andre ordens differensialligningen som et system av første ordens differensialligninger.

Finn to forskjellige approksimasjoner til $x(0.1)$ ved å beregne ett skritt av Eulers metode og forbedret Eulers metode (Heuns metode) på systemet, med skrittlengde $h = 0.1$.

- b) Beregn lokal feil for de to approksimasjonene, finn en feilskranke av formen Ch^{p+1} , med C en konstant og p et heltall. Hvilken av de to metodene gir det beste svaret? Forklar hvorfor.

Oppgave 6

Den m -te roten av et tall R er en løsning av den ikke-lineære ligningen

$$(1) \quad x^m - R = 0.$$

Vi antar $R > 0$ og $m \geq 2$.

- a) Skriv ned en iterasjon for å approksimere $\sqrt[m]{R}$ ved bruk av Newtons metode på (1).

Betrakt fikspunktiterasjonen

$$(2) \quad x_{n+1} = 1 - \frac{R}{x_n^m} + \frac{R}{x_n^{m-1}}$$

for å løse

$$(3) \quad x = g(x), \quad \text{med} \quad g(x) = 1 - \frac{R}{x^m} + \frac{R}{x^{m-1}}.$$

Verifiser at $\sqrt[m]{R}$ er et fikspunkt for ligningen (3).

- b) Beregn noen iterasjoner med Newtons metode og iterasjonen (2) for å finne $\sqrt[m]{R}$ med $m = 2$ og $R = 7/2$, og $x_0 = 2$. Sammenlign resultatene. Avslutt hver av iterasjonene når feilen er mindre enn 10^{-4} .