Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68
Wen Shen tlf. 73 59 35 41

EKSAMEN I SIF5016 MATEMATIKK 4N

Bokmål
Lørdag 9. desember 2000
Kl. 9–14

Hjelpemidler – B2:
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste
Rottman: *Matematisk formelsamling*
Vedlegg: Formelark

Sensuren faller i uke 3.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.

Oppgave 1

a) Funksjonene $f(t)$ og $h(t)$ har Laplacetransformerte

$$F(s) = \frac{2b}{s^2 - b^2} + \frac{b^2}{s^2(s-b)} \qquad \text{og} \qquad H(s) = F(s)e^{-as}$$

der a og b er konstanter, $a \geq 0$ og $b \neq 0$. Finn $f(t)$ og $h(t)$.

b) Bruk Laplacetransformasjonen til å løse differensialligningen

$$y'' - y = 2\delta(t-1) + g(t) \qquad \text{der} \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 1 \\ t & \text{for } t > 1, \end{cases}$$

$\delta(t-1)$ er Diracs deltafunksjon og initialverdiene er $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Er løsningen deriverbar overalt?

Oppgave 2

a) Finn en (formell) løsning av rand– og initialverdiproblemet

(i) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{(1-dimensjonal varmeligning)}$$

(ii) $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0,$$

(iii) $$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{for } 0 < x < \pi/2, \\ \pi - x & \text{for } \pi/2 < x < \pi, \end{cases}$$

når det oppgis som kjent fra læreboka at alle funksjoner av formen $u(x,t) = F(x)G(t$ som oppfyller (i) og (ii) er gitt ved

$$u_n(x,t) = B_n e^{-n^2c^2t} \sin nx, \qquad B_n \text{ konstant}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) Finn alle løsninger av (i) på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller randbetingelsene

(iv) $$u(0,t) = 0 \quad \text{og} \quad u_x(\pi,t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0.$$

Oppgave 3

a) Funksjonen $u(x,t)$ tilfredsstiller den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{for } t > 1, \ -\infty < x < \infty.$$

Dessuten er

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_x(x,t) = 0 \qquad \text{for } t > 1$$
$$u(x,1) = f(x) \qquad \text{for } -\infty < x < \infty$$

der $f(x)$ er en gitt funksjon.

Finn en differensialligning som den Fouriertransformerte

$$\widehat{u}(w,t) = \mathcal{F}\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-iwx}\,dx$$

tilfredsstiller og vis, ved å løse denne, at $\widehat{u}(w,t) = \widehat{f}(w)e^{-w^2 \ln t}$.

b) La A være en konstant, $A > 1$, og sett $g_A(x) = e^{-x^2/(4 \ln A)}$.

Finn den Fouriertransformerte $\widehat{g}_A(w) = \mathcal{F}\{g_A(x)\}$. Bruk tabell.

Vis at $u(x,t)$ (funksjonen i **a)**) kan skrives på formen

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \ln t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)h(p,t)\,dp$$

og skriv opp eksplisitt formen av $h(x,t)$.

Oppgave 4

Det oppgis at den komplekse Fourierrekka til funksjonen $f(x) = e^x$ for $-\pi < x < \pi$ og $f(x+2\pi) = f(x)$ er

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx}.$$

Bruk dette til å finne summen av rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Oppgave 5

a) La problemet

(i)	$u_t = u_{xx}\,,$	$t > 0\,, \quad 0 < x < 1\,,$
(ii)	$u(0,t) = u(1,t) = 0\,,$	$t \geq 0\,,$
(iii)	$u(x,0) = 8x(1-x)\,,$	$0 \leq x \leq 1\,,$

være gitt.

Crank-Nicolsons skjema kan generelt gis ved

$$U_i^{n+1} - U_i^n = \frac{k}{2h^2}(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n + U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}).$$

La $\triangle x = h = \frac{1}{4}$, $\triangle t = k = \frac{1}{16}$, og utled ligningsystemet for $U_i^1 = U(ih, k)$, $i = 1, 2, 3$, ved å bruke Crank-Nicolson som numerisk skjema.

b) La $x_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = 1$, $z_0 = \frac{3}{4}$, og gjør én iterasjon med Gauss-Seidel på ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4x - \ \ y \qquad &= 2 \\ -x + 4y - \ \ z &= 3 \\ - \ \ y + 4z &= 2. \end{aligned}$$

c) Finn polynomet av lavest mulig grad som interpolerer følgende datasett:

x_k	0	1	2	3	4
$f(x_k)$	0	11	16	11	0