Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø tlf. 73 59 35 42
Achim Schroll tlf. 73 59 35 41

EKSAMEN I SIF5016 MATEMATIKK 4N

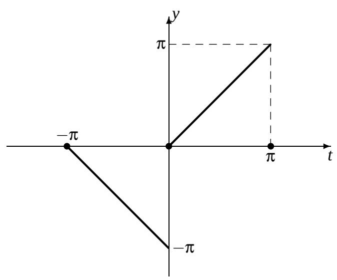
Bokmål
Lørdag 11. desember 1999
Kl. 9–14

Hjelpemidler: Rottman: *Matematisk formelsamling*
Typegodkjent kalkulator med tomt minne
Formler i Numerikk

Sensuren faller i uke 3.

Oppgave 1

a) Finn Fourierrekka til en 2π-periodisk funksjon $f(t)$ når grafen til f for $-\pi \leq t \leq \pi$ er:



b) Hva er summen av Fourierrekka til funksjonen $f(t)$ i **a)** for $t = 0$ og for $t = \pi$?

Finn en formel for summen av Fourierrekka på intervallet $\pi < t < 2\pi$.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 3y' + 2y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

der

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t < 1 \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

b) Løs integralligningen

$$y(t) = \cos t + \int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du, \qquad t \geq 0.$$

Oppgave 3

Gitt den partielle differensialligningen

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0.$$

a) Finn alle løsninger av $(*)$ på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller betingelsen

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0.$$

b) Finn en løsning av $(*)$ som tilfredsstiller (1) og initialbetingelsene

$$(2) \qquad u(x,0) = 1 + 2\cos x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos 2x.$$

Oppgave 4

Finn potensrekkeløsningen $y(x)$ av ligningen

$$(x^2 - 1)y'' + 8xy' + 12y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

For hvilke verdier av x er vi garantert at løsningen konvergerer?

Oppgave 5 Finn interpolasjonspolynomet til datasettet

x_k	-1	0	1	2
$f(x_k)$	4	1	-2	1

Oppgave 6 Formuler Newtons metode for systemet

$$\begin{aligned} x^2 + xy^3 - 9 &= 0, \\ 3x^2y - y^3 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Bruk startverdiene $x_0 = 1.2$, $y_0 = 2.5$ og utfør to iterasjoner.

Oppgave 7 Vi skal løse diffusjonsligningen

$$u_t = u_{xx}, \qquad \text{for} \qquad 0 \le x \le 1 \qquad \text{og} \qquad t \ge 0.$$

Startverdiene er

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \qquad 0 \le x \le 1$$

og randbetingelsene

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \ge 0.$$

a) La $h = k = 0.25$ og formuler Crank-Nicolsons metode for dette problemet.
Sett opp det lineære ligningssystemet som bestemmer de numeriske tilnærmelsene $u_1^1 \approx u(0.25, 0.25)$, $u_2^1 \approx u(0.5, 0.25)$ og $u_3^1 \approx u(0.75, 0.25)$.

Hint: Bruk $u_t(x,t) \approx (u(x,t) - u(x,t-k))/k$
og $u_{xx}(x,t) \approx (u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t))/h^2$.

b) Ligningssystemet fra **a)** skal løses i MATLAB. For å gjøre det, fullfør MATLAB-kommandoene i følgende sekvens:

```
>> A =
>> b =
>> u =
```

(Har du ikke klart punkt **a)**, velg et vilkårlig linært system av 3 ligninger og 3 ukjente.)