NTNU
Institutt for matematiske fag

SIF5016 Matematikk 4N
eksamen 20.12.02

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 11 punkter, 1ab, 2ab, 3ab, 4, 5, 6 og 7ab som teller likt ved bedømmelsen.

1 **a)** Funksjonen $f(t)$ kan uttrykkes ved hjelp av Heavisidefunksjonen (stepfunksjonen) $u(t)$ som

$$f(t) = (t-1)^2 u(t-1).$$

Av transformasjonsregelen $\mathcal{L}\{h(t-a)u(t-a)\} = H(s)e^{-as}$ får vi, siden $\mathcal{L}\{t^2\} = 2/s^3$,

$$F(s) = \frac{2}{s^3}e^{-s}.$$

Fra regelen om den Laplacetransformerte til et integral, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\} = (1/s)F(s)$, finner vi at den Laplacetransformerte til $g(t)$ er

$$G(s) = \frac{1}{s}F(s) = \frac{2}{s^4}e^{-s}.$$

b) Vi setter $X_1 = \mathcal{L}\{x_1\}$ og $X_2 = \mathcal{L}\{x_2\}$. Den Laplacetransformerte av differensialligningssystemet blir det lineære systemet

$$\begin{aligned} sX_1 + X_2 &= F(s) \\ X_1 - (sX_2 - 1) &= G(s) \end{aligned} \qquad \text{dvs.} \qquad \begin{aligned} sX_1 + X_2 &= F(s) \\ X_1 - sX_2 &= G(s) - 1. \end{aligned}$$

Vi kan løse ligningssystemet f.eks. ved å gange den andre ligningen med s og trekke den fra den første. Det gir $X_2 + s^2X_2 = F(s) - sG(s) + s = s$ (siden $sG(s) = F(s)$) og dermed

$$X_2 = \frac{s}{s^2+1}.$$

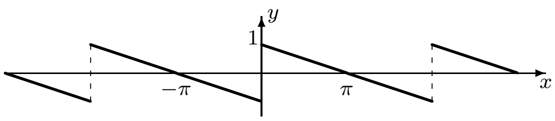
For X_1 får vi

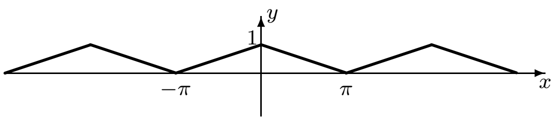
$$X_1 = sX_2 + G(s) - 1 = G(s) - \frac{1}{s^2+1} = \frac{2}{s^4}e^{-s} - \frac{1}{s^2+1}.$$

Siden $\mathcal{L}^{-1}(2/s^4) = t^3/3$ får vi ved invers Laplacetransformasjon at

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}(t-1)^3u(t-1) - \sin t \\ x_2 &= \cos t. \end{aligned}$$

2 **a)** Grafen til den odde, henholdsvis jevne, 2π-periodiske utvidelsen av f:





Koeffisientene i sinusrekka er gitt ved formelen

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Vi benytter delvis integrasjon og får

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx}_{0} = \frac{2}{n\pi}.$$

Sinusrekka til f er Fourierrekka til g. Altså er

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n}.$$

Når $x = 31\pi/2$ har vi, fordi g er odde og periodisk med periode 2π, at summen av rekka er

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin n(31\pi/2)}{n} = g(16\pi - \pi/2) = g(-\pi/2) = -g(\pi/2) = \frac{\pi/2}{\pi} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

b) Dersom $u(x,t) = F(x)G(t)$ tilfredsstiller $(*)$ og $(**)$, må vi ha

$$F'' = kF, \quad G' = kc^2G \quad \text{og} \quad F(0) = F(\pi) = 0.$$

Fra Kreyszig 11.5 vet vi at alle ikketrivielle løsninger for $F(x)$ blir $F_n(x) = B_n^*\sin nx$ for $k = -n^2$ der $n = 1, 2, 3, \ldots$ og B_n^* er konstant. For $G(t)$ får vi $G_n(t) = C_n e^{-n^2c^2t}$ der C_n er konstant, og altså

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n e^{-n^2c^2t}\sin nx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (B_n = B_n^*C_n).$$

Siden $(*)$ er lineær og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x,t)$ også en løsning, og den oppfyller $(**)$. Vi setter følgelig $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty B_n e^{-n^2c^2t}\sin nx$ og bestemmer koeffisientene B_n slik at initialbetingelsen blir oppfylt.

Vi skal ha $1 - x/\pi = u(x,0) = \sum_{n=1}^\infty B_n\sin nx$ for $0 < x < \pi$. Fra punkt a) får vi $B_n = 2/(n\pi)$ og følgelig

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}e^{-n^2c^2t}\sin nx.$$

$\boxed{3}$ **a)** For de Fouriertransformerte får vi

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^1 e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-e^{-iwx}}{iw}\right]_{-1}^1 = \frac{-e^{-iw}+e^{iw}}{iw\sqrt{2\pi}} = \frac{2i\sin w}{iw\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}$$

$$\widehat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-(1+iw)x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-e^{-(1+iw)x}}{1+iw}\right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+iw} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-iw}{1+w^2}.$$

(Vi brukte at $\lim_{x\to\infty} e^{-(1+iw)x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}e^{-iwx} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}(\cos wx - \sin wx) = 0.$)

b) Vi har $\mathcal{F}\{h(x)\} = \mathcal{F}\{(f*g)(x)\} = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(w)\widehat{g}(w)$ ifølge konvolusjonsregelen. Siden $h(x)$ er kontinuerlig, får vi ved hjelp av formelen for invers Fouriertransformert at

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}\cdot\widehat{g}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(w)\widehat{g}(w)e^{iwx}\,dw = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{(1-iw)\sin w}{w(1+w^2)}e^{iwx}\,dw.$$

Setter vi $x = 0$, får vi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{(1-iw)\sin w}{w(1+w^2)}\,dw = h(0) = \int_{-\infty}^\infty f(-p)g(p)\,dp = \int_{-1}^1 g(p)\,dp = \int_0^1 e^{-p}\,dp = 1-e^{-1}.$$

Det søkte integralet er realdelen av integralet på venstresiden. Siden høyresiden er reell, får vi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{w(1+w^2)}\,dw = 1-e^{-1} \qquad \text{dvs.} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{w(1+w^2)}\,dw = \pi(1-e^{-1}).$$

$\boxed{4}$ La $W(x,s)$ være den Laplacetransformerte til $w(x,t)$. Det vil si $W(x,s)=\int_0^\infty e^{-st}w(x,t)dt$. Dersom vi transformerer hele ligningen får vi en ordinær homogen første ordens differensialligning i x med s som parameter:

$$\frac{\partial W(x,s)}{\partial x} + 2xsW(x,s) = 0.$$

Den generelle løsningen av denne ligningen er

$$W(x,s) = F(s)e^{-x^2 s}.$$

Vi finner $w(x,t)$ ved å bruke den inverse Laplacetransformasjonen. Fra tabellen (2. skifteteorem) får vi

$$w(x,t) = f(t-x^2)u(t-x^2).$$

Randbetingelsen er tilfredsstilt når $f(t)=t$, og altså er

$$w(x,t) = (t-x^2)u(t-x^2) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0<t<x^2 \\ t-x^2 & \text{for } x^2<t. \end{cases}$$

$\boxed{5}$ Ved å bruke formelen for Gauss-Seidels metode får vi

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(-x_2^{(0)}+x_3^{(0)}+1\right) = \frac{1}{10}\\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{30}\left(x_1^{(1)}-x_3^{(0)}+1\right) = \frac{1}{300}+\frac{1}{30} = \frac{11}{300}\\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{20}\left(-x_1^{(1)}+2x_2^{(1)}\right) = -\frac{1}{200}+\frac{22}{6000} = -\frac{8}{6000} = -\frac{1}{750}.
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Den generelle formelen for Heuns metode er

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n,y_n), \qquad y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}h\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^*)\right].$$

Her er $y'=3xy$, $x>0$ og $y(0)=1$ slik at $f(x,y)=3xy$, $x_0=0$, $y_0=y(0)=1$.

Med $h=0.3$ får vi

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.3\\
y_1^* &= 1\\
y_1 &= 1+0.5\cdot 0.3\cdot 3\cdot 0.3 = 1.135.
\end{aligned}$$

Når vi betrakter problemet $y'=3xy$, $x<0$ har vi $h=-0.3$, $x_0=0$, $y_0=1$ og vi får

$$\begin{aligned}
x_1 &= -0.3\\
y_1^* &= 1\\
y_1 &= 1-0.5\cdot 0.3\cdot 3\cdot(-0.3) = 1.135.
\end{aligned}$$

Eksakt løsning:

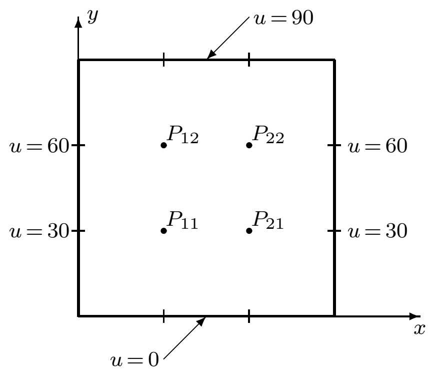
$$y' = 3xy \Rightarrow \frac{y'}{y} = 3x \Rightarrow (\ln y)' = 3x \Rightarrow \ln y = \tfrac{3}{2}x^2 + C,$$
$$y(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y(x) = e^{3x^2/2}.$$

Når $x = 0.3$ har vi $\frac{3}{2}x^2 = 0.135$ og $e^{0.135} = 1.1445\ldots$. Feilen er ≈ 0.0095. Den samme feilen får vi ved $x = -0.3$.

$\boxed{7}$ **a)**

Differanseligninger:

$$\begin{aligned}
4u_{11} - u_{12} - u_{21} \phantom{{}- u_{22}} &= 30 \\
-u_{11} + 4u_{12} - u_{22} &= 150 \\
-u_{11} + 4u_{21} - u_{22} &= 30 \\
-u_{12} - u_{21} + 4u_{22} &= 150.
\end{aligned}$$



b) Jacobis metode på systemet i a) med startverdier $u_{ij}^{(0)} = 0$ for $i,\ j = 1,\ 2$:

$$\begin{aligned}
u_{11}^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(30 + u_{12}^{(0)} + u_{21}^{(0)}\right) = \frac{15}{2} \\
u_{12}^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(150 + u_{11}^{(0)} + u_{22}^{(0)}\right) = \frac{75}{2} \\
u_{21}^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(30 + u_{11}^{(0)} + u_{22}^{(0)}\right) = \frac{15}{2} \\
u_{22}^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(150 + u_{12}^{(0)} + u_{21}^{(0)}\right) = \frac{75}{2}.
\end{aligned}$$