SIF5013 Matematikk 4N
16. mai 2001

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 11 punkter, 1ab, 2, 3ab, 4ab, 5ab, 6ab, som teller likt ved bedømmelsen.

$\boxed{1}$ **a)** Laplacetransformerer: $\big[sI(s) - i(0)\big] + 4I(s) + 3 \cdot \frac{1}{s} I(s) = V(s),\ i(0) = 0$

$$(s^2 + 4s + 3)I(s) = sV(s) \quad \Rightarrow \quad I(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 3} V(s) = \frac{s}{(s+1)(s+3)} V(s)$$

$$V(s) = \frac{6}{s} \ \Rightarrow \ I(s) = \frac{6}{(s+1)(s+3)} = 3\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}\right] \ \Rightarrow \ i(t) = 3\big(e^{-t} - e^{-3t}\big)$$

b)

$$v(t) = e^{-2t}u(t-2) = e^{-2(t-2)}e^{-4}u(t-2) = f(t-2)u(t-2)$$

$$V(s) = F(s)e^{-2s} = \frac{1}{s+2}e^{-4}e^{-2s} = \frac{1}{s+2}e^{-2(s+2)}$$

Alternativ utregning av $V(s)$:

$$V(s) = \int_2^\infty e^{-2t}\, e^{-st}\, dt = \int_2^\infty e^{-(s+2)t}\, dt = \left[\frac{-1}{s+2}e^{-(s+2)t}\right]_{t=2}^\infty = \frac{1}{s+2}e^{-2(s+2)}$$

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{s}{(s+1)(s+3)}V(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \cdot e^{-2(s+2)} \\ &= \left[\frac{-1/2}{s+1} + \frac{2}{s+2} - \frac{3/2}{s+3}\right]e^{-4} \cdot e^{-2s} = Y(s)e^{-2s} \\ i(t) &= y(t-2)u(t-2) \\ &= \big[-\tfrac{1}{2}e^{-(t-2)} + 2e^{-2(t-2)} - \tfrac{3}{2}e^{-3(t-2)}\big]e^{-4}u(t-2) \\ &= -\tfrac{1}{2}\big[e^{-t-2} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t+2}\big]u(t-2) \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Laplacetransformerer ved hjelp av konvolusjonsregelen:

$$f(t) * e^{at} = \sin t \quad \Rightarrow \quad F(s) \cdot \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s^2+1}$$

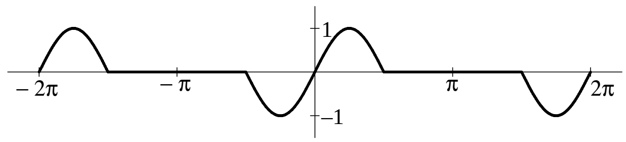
$$F(s) = \frac{s-a}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{a}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \cos t - a \sin t$$

Eller, vi kan Laplacetransformere ved hjelp av skiftteorem 1 og integralregelen:

$$\int_0^\infty f(\tau)e^{-a\tau}\, d\tau = e^{-at}\sin t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s}F(s+a) = \frac{1}{(s+a)^2+1}$$

$$F(s+a) = \frac{s}{(s+a)^2+1} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{s-a}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \cos t - a\sin t$$

$\boxed{3}$ **a)**



$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin 2x\sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}$$

For $n \neq 2$ er

$$b_n = 0 \quad \text{for } n = 2m \quad \text{og} \quad b_n = -\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)} \quad \text{for } n = 2m+1$$

siden $\sin(2m\cdot\pi/2) = 0$ og $\sin[(2m+1)\pi/2] = \sin(m\pi + \pi/2) = \cos m\pi = (-1)^m$. Fourierrekka til $f(x)$ er en sinusrekke, og $f(x)$ er kontinuerlig for alle x. Altså har vi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq 2}}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{(n-2)(n+2)}\sin nx \\ &= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)}\sin(2m+1)x \qquad \text{for alle } x. \end{aligned}$$

b) For $x = \pi/2$ er $f(x) = 0$ og $\sin(2m+1)x = (-1)^m$. Det gir

$$0 = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)} = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)(2m+3)}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)(2m+3)} = \frac{1}{(-1)\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots = 0.$$

For å finne summen av den andre rekka, kan vi bruke Parsevals identitet:

$$\frac{1}{4} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)}\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2(2m+3)^2} = \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big)\Big/\frac{16}{\pi^2} = \frac{\pi^2}{64}$$

$\boxed{4}$ **a)** Setter inn $u(x,y) = F(x)G(y)$ i (i) og bruker randbetingelsene (ii).

$$F''G + FG'' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = k \quad \text{(konstant)}$$

$$\text{(I)} \quad F'' - kF = 0, \quad F'(0) \overset{\text{(ii)}}{=} 0,\; F'(\pi) \overset{\text{(ii)}}{=} 0, \qquad \text{(II)} \quad G'' + kG = 0, \quad G(0) \overset{\text{(ii)}}{=} 0$$

Bestemmer først $F(x)$ fra (I) og deretter $G(y)$ fra (II).

(I) $F'' - kF = 0$, k vilkårlig konstant, $F'(0) = 0$, $F'(\pi) = 0$

$$\begin{array}{ll}
k > 0,\ \ k = \mu^2: & F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x},\ F'(x) = \mu A e^{\mu x} - \mu B e^{-\mu x} \\
 & F'(0) = F'(\pi) = 0 \Rightarrow A = B = 0,\ F(x) = 0 \\
k = 0: & F(x) = Ax + B,\ F'(x) = A \\
 & F'(0) = F'(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0,\ F_0(x) = 1 \quad (B = 1) \\
k < 0,\ \ k = -p^2: & F(x) = A\cos px + B\sin px,\ F'(x) = -pA\sin px + pB\cos px \\
 & F'(0) = 0 \Rightarrow B = 0, \quad F'(\pi) = 0,\ B = 0,\ A \neq 0\ \Rightarrow \sin p\pi = 0 \\
 & p = n = 1, 2, 3, \dots, \quad F_n(x) = \cos nx \quad (A = 1)
\end{array}$$

(II) $G'' + kG = 0$, $k = 0$ og $k = -n^2$, $G(0) = 0$

$$\begin{array}{ll}
k = 0: & G(y) = Ay + B, \quad G(0) = 0 \Rightarrow B = 0,\ G_0(y) = A_0 y \\
k = -n^2: & G(y) = A'e^{ny} + B'e^{-ny}, \quad G(0) = 0 \Rightarrow B' = -A' \\
 & G_n(y) = A'_n(e^{ny} - e^{-ny}) = A_n \sinh ny \quad (A_n = 2A'_n)
\end{array}$$

Løsningene av (i) på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ som oppfyller (ii):

$$u_0(x,y) = F_0(x)G_0(y) = A_0 y \quad \text{og} \quad u_n(x,y) = F_n(x)G_n(y) = A_n \cos nx \sinh ny$$

b) For å finne en løsning av (i) som, i tillegg til (ii), også oppfyller (iii), setter vi

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx \sinh ny$$

og bestemmer A_0, A_1, A_2, ... slik at (iii) blir oppfylt.

$$1 - 2\cos 2x + \cos 4x \overset{\text{(iii)}}{=} u(x,\pi) = A_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \sinh n\pi\big) \cos nx$$

$$A_0 = 1/\pi, \quad A_2 = -2/\sinh 2\pi, \quad A_4 = 1/\sinh 4\pi, \quad A_n = 0 \text{ ellers}$$

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} - \frac{2}{\sinh 2\pi}\cos 2x \sinh 2y + \frac{1}{\sinh 4\pi}\cos 4x \sinh 4y$$

$\boxed{5}$ **a)** Vi setter $x_1 := x$ og $x_2 := x'$ og vi får følgende system:

$$\begin{cases} x_1{}' = x_2 & x_1(0) = 1 \\ x_2{}' = x_1^2 e^t + x_2 & x_2(0) = 2 \end{cases}.$$

Vi skriver det i vektor-notasjon ved å sette $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ slik at

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^2 e^t + x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- Vi beregner ett skritt av Eulers metode på systemet: $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0)$. Vi tar $t_0 = 0$ og $h = 0.1$, for å få $\mathbf{x}(0.1) \approx \mathbf{x}_1$ og vi finner

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2 \\ e^0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.3 \end{bmatrix}.$$

Dermed har vi $x(0.1) \approx x_1 = 1.2$.

- Vi beregner ett skritt av forbedret Eulers metode (Heuns metode):

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2\right)$$

med

$$\mathbf{K}_1 = h\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0) \quad \text{og} \quad \mathbf{K}_2 := h\mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}_0 + \mathbf{K}_1).$$

Med $t_0 = 0$ og $h = 0.1$ får vi

$$\mathbf{K}_1 = 0.1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 + \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = 0.1\begin{bmatrix} 2.3 \\ 1.2^2 e^{0.1} + 2.3 \end{bmatrix}.$$

og

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.23 \\ 0.1 \cdot 1.2^2 e^{0.1} + 0.23 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1.2150 \\ 2.3446 \end{bmatrix}.$$

Dette betyr at $x(0.1) \approx 1.2150$.

b) Vi beregner lokal feil for de to metodene: $e_1^E := x(0.1) - x_1^E$ og $e_1^{FE} := x(0.1) - x_1^{FE}$

$$|e_1^E| = |1.2165 - 1.2| = 0.0165 = (0.1^2)1.65, \qquad p = 1, \quad C^E = 1.65$$

$$|e_1^{FE}| = |1.2165 - 1.2150| = 0.0015 = (0.1^3)1.5 \quad p = 2, \quad C^{FE} = 1.5,$$

approksimasjonen med forbedret Eulers metode er den beste. Man kan forvente dette siden forbedret Eulers metode har orden 2 mens Eulers metode har orden 1.

$\boxed{5}$ **a)** Newtons metode for $x^m - R = 0$ gir følgende iterasjon:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - R}{m x_n^{m-1}}.$$

For den gitte fikspunktligningen er:

$$g(\sqrt[m]{R}) = 1 - \frac{R}{(\sqrt[m]{R})^m} + \frac{R}{(\sqrt[m]{R})^{m-1}} = \frac{R}{(\sqrt[m]{R})^m}\sqrt[m]{R} = \sqrt[m]{R},$$

d.v.s at $\sqrt[m]{R} = g(\sqrt[m]{R})$, og $\sqrt[m]{R}$ er et fikspunkt for ligningen $x = g(x)$.

Vi skal beregne Newtons iterasjon og iterasjonen

$$x_{n+1} = 1 - \frac{R}{x_n^m} + \frac{R}{x_n^{m-1}},$$

med $m = 2$, $R = 7/2$ og $x_0 = 2$, for å approksimere $\sqrt{7/2} = 1.8708$.

Newtons metode:

$$x_1 = 2 - \frac{4 - \frac{7}{2}}{4} = \frac{15}{8}, \qquad x_2 = \frac{15}{8} - \frac{(\frac{15}{8})^2 - \frac{7}{2}}{2 \cdot \frac{15}{8}} = 1.8708.$$

Fikspunktiterasjonen:

$$x_1 = 1 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{8}, \;\; x_2 = 1 - \frac{7}{2} \cdot \frac{8^2}{15^2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{8}{15} = 1.8711, \;\; x_3 = 1.8708.$$

Newtons metode tar et skritt mindre enn fikspunktiterasjonen for å finne 1.8708.