Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68
Elena Celledoni tlf. 73 59 35 44, 73 93 13 43

EKSAMEN I SIF5013 MATEMATIKK 4N

Bokmål
Lørdag 11. mai 2002
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*
Vedlegg: Formelark i numerikk

Sensurdato: 4. juni

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

a) La a være en positiv konstant, og la $u(t-a)$ være stepfunksjonen (Heavisidefunksjonen) gitt ved $u(t-a) = 0$ for $t < a$, $u(t-a) = 1$ for $t > a$.

Vis at den Laplacetransformerte av funksjonen $g_a(t) = u(t-a)\sin t$ er

$$G_a(s) = e^{-as}\frac{\cos a + s\sin a}{s^2+1}.$$

Finn invers Laplacetransformert $h_a(t)$ for funksjonen

$$H_a(s) = \frac{2s+3a}{s^2+2as+a^2+1}\,.$$

b) Løs, for $t \geq 0$, initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = r(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

når $r(t)$ er gitt ved $r(t) = 5\sin t$ for $0 \leq t \leq \pi$, $r(t) = 0$ for $t > \pi$.

Oppgitt delbrøkoppspalting:

$$\frac{5}{(s^2+2s+2)(s^2+1)} = \frac{2s+3}{s^2+2s+2} - \frac{2s-1}{s^2+1}$$

Oppgave 2
Løs integralligningen

$$y(t) = ke^{-bt} + \int_0^t e^{-b(t-\tau)} y(\tau)\, d\tau, \qquad t \geq 0$$

der b og k er konstanter.

Oppgave 3

a) Funksjonen $f(x)$ er gitt for $0 < x < \pi$ ved

$$f(x) = \frac{x}{2} \cos x, \qquad 0 < x < \pi.$$

Finn sinusrekka til $f(x)$ når det oppgis at for $n \neq 1$ er b_n gitt ved

$$b_n = (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

(Hint for å beregne b_1: $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$.)

b) Gitt den partielle differensialligningen

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{for } 0 < x < \pi,\ t > 0$$

med randbetingelser

(2) $$u(0,t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0 \qquad \text{for } t > 0.$$

Vis at metoden med separasjon av variable (produktmetoden) fører til løsninger av formen $u_n(x,t) = G_n(t) \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, der $G_n(t)$ er løsning av differensialligningen

$$G'' + 2G' + n^2 G = 0.$$

Bestem $G_n(t)$ for $n = 1$ og for $n > 1$.

c) Finn en rekkeutvikling for en løsning $u(x,t)$ av (1) som oppfyller (2) og initialbetingelsene

(3) $$u(x,0) = \frac{x}{2} \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{for } 0 < x < \pi.$$

Oppgave 4
Finn den Fouriertransformerte $\widehat{f}(w) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx$ for funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Bruk invers Fouriertransformasjon til å finne verdien av integralet

$$\int_0^\infty \frac{\sin w \cos 2w}{w}\, dw\, .$$

Oppgave 5
Finn polynomet av lavest mulig grad som interpolerer følgende datasett:

x_i	1	1.5	2	3
y_i	2	1	0.5	0

Oppgave 6
Vi skal løse numerisk

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && t \geq 0,\ \ 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,0) &= \sin(2\pi x) && 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, && t \geq 0. \end{aligned}$$

Med Crank-Nicolson skjema finner vi en tilnærmelse U_i^{j+1} til løsningen u i punktet (x_i, t_{j+1}) ved å løse

$$(2+2r)U_i^{j+1} - r(U_{i+1}^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}) = (2-2r)U_i^j + r(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) \quad \text{der} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ j = 0, 1, 2, \ldots\,, \end{array}$$

og $x_i = i \cdot h$, $t_j = j \cdot k$, der $h = 1/n$ er romskritt, k er tidsskritt og $r = k/h^2$.

La $r = 1/2$ og $n = 4$. Sett opp et ligningssystem for å finne U_i^1 for $i = 1$, 2, 3, med Crank-Nicolsons metode. U_i^0 gis av initialbetingelser. (Ligningssystemet skal ikke løses.)

Oppgave 7
Finn en tilnærmelse til løsningen av den ikkelineære ligningen

$$x^2 + e^x - 1 = 0$$

ved å utføre 3 iterasjoner med Newtons metode, startverdi $x_0 = -1$. Beregn residualet for x_3.

Oppgave 8
Bruk ett skritt av Heuns metode (forbedret Eulers metode) for å approksimere løsningen til

$$\begin{aligned} y' &= y^2 + t \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

ved tiden $t = 0.1$.