Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Knudsen tlf. 73 59 35 23
Yurii Lyubarskii tlf. 73 59 35 26

EKSAMEN I SIF5016 MATEMATIKK 4N

Bokmål
Fredag 20. desember 2002
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Vedlegg: Formelark i numerikk

Sensurdato: 29. januar

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

La funksjonen $f(t)$ være definert ved

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 1 \\ (t-1)^2 & \text{for } t > 1, \end{cases}$$

og la $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ for $t > 0$.

a) Finn de Laplacetransformerte $F(s)$ og $G(s)$ til $f(t)$ og $g(t)$.

b) Bruk Laplacetransformasjonen til å løse differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1' + x_2 &= f(t) \\ x_1 - x_2' &= g(t) \end{aligned}$$

med startverdiene

$$x_1(0) = 0 \quad \text{og} \quad x_2(0) = 1.$$

Oppgave 2

La f være definert på intervallet $0 < x < \pi$ ved formelen $f(x) = 1 - x/\pi$, og la g være den odde og h den like (jevne) 2π-periodiske utvidelsen til f.

a) Skisser grafene til g og h i intervallet $-3\pi < x < 3\pi$. Finn Fouriersinusrekka til f, og beregn summen av rekka for $x = 31\pi/2$.

b) La $u(x,t)$ være en funksjon definert i området $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$ som tilfredsstiller differensialligningen

$$(*) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (c \text{ en positiv konstant})$$

med randbetingelsene

$$(**) \qquad u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \quad \text{for } t \ge 0.$$

Bestem alle funksjoner $u(x,t)$ på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller $(*)$ og $(**)$.

Finn, på rekkeform, en funksjon $u(x,t)$ som i tillegg til $(*)$ og $(**)$ tilfredsstiller initialbetingelsen $u(x,0) = 1 - x/\pi$ for $0 < x < \pi$.

Oppgave 3

Funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| < 1 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \qquad \text{og} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Vis at de Fouriertransformerte $\left((1/\sqrt{2\pi}\,)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx\right)$ av $f(x)$ og $g(x)$ er

$$\widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w} \qquad \text{og} \qquad \widehat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-iw}{1+w^2}.$$

b) La $h(x)$ være konvolusjonen $\left(h(x) = (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)\,dp\right)$ av $f(x)$ og $g(x)$. Gjør rede for at

$$h(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-iw)\sin w}{w(1+w^2)} e^{iwx}\,dw$$

og bestem verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w(1+w^2)}\,dw.$$

(Du kan bruke, uten bevis, at $h(x)$ er en kontinuerlig funksjon.)

Oppgave 4
Bruk Laplacetransformasjonen til å løse den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial w}{\partial x} + 2x\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \qquad t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$$

når $w(x,t)$ skal oppfylle betingelsene $w(x,0) = 0$ for alle x og $w(0,t) = t$ for $t \geq 0$.

Oppgave 5
Gitt det lineære ligningssystemet

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + 30x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 20x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Gjør én iterasjon på dette systemet med Gauss-Seidels iterative metode for lineære ligningssystemer. Bruk startvektoren $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$.

Oppgave 6
Gjør ett skritt med Heuns metode på hvert av de to initialverdiproblemene

$$\begin{cases} y' - 3xy = 0, & \text{gyldig for } x > 0, \\ \quad y(0) = 1, & \end{cases}$$

og

$$\begin{cases} y' - 3xy = 0, & \text{gyldig for } x < 0, \\ \quad y(0) = 1. & \end{cases}$$

Bruk henholdsvis $h = 0.3$ og $h = -0.3$ som skrittlengder.

Finn eksakt løsning av begge initialverdiproblemene og feilen i henholdsvis $x = 0.3$ og $x = -0.3$ for de to numeriske løsningene.

Oppgave 7
Gitt den partielle differensialligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

på området $[0,9] \times [0,9]$ og tilhørende randbetingelser

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, & u(x,9) &= 90, & &\text{for } 0 \leq x \leq 9, \\ u(0,y) &= 10y, & u(9,y) &= 10y, & &\text{for } 0 \leq y \leq 9. \end{aligned}$$

a) Bruk skrittlengde $h = 3$ i både x- og y-retning og sett opp differenseligningen for u_{ij} i hvert av de fire indre punktene.

b) Gjør én iterasjon med Jacobis metode på det lineære ligningssystemet fra a). Bruk $u_{ij} = 0$ som startverdier for alle de indre punktene.