Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68
Bjarte Hægland tlf. 73 59 17 95

EKSAMEN I SIF5013 MATEMATIKK 4N

Bokmål
Onsdag 14. mai 2003
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*
Vedlegg: Formelark i numerikk

Sensurdato: 4. juni

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

La $f(t)$ være en funksjon med Laplacetransformert $F(s)$, og la $h(t)$ være funksjonen definert ved $h(t) = e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau} f(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau$.

a) Vis at den Laplacetransformerte av $h(t)$ er

$$H(s) = \frac{F(s)}{s+2}.$$

Bestem $h(t)$ i hvert av tilfellene

$$(1)\quad F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} \qquad \text{og} \qquad (2)\quad F(s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}\right)e^{-s}.$$

b) La igjen $f(t)$ være en funksjon med Laplacetransformert $F(s)$, og la $h(t)$ være definert som ovenfor. Bruk Laplacetransformasjon til å vise at løsningen av initialverdiproblemet

$$y'' + 4y' + 4y = f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\,d\tau, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

kan skrives på formen $y = g(t) + \int_0^t h(\tau)\,d\tau$. Hva blir $g(t)$? (Husk at $F(s)/(s+2) = H(s)$.)

Oppgave 2

La $f(x)$ i hele denne oppgaven være funksjonen gitt på intervallet $0 < x < \pi$ ved

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{for } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{for } 0 < x < 1 \text{ og for } 2 < x < \pi. \end{cases}$$

a) Finn Fouriersinusrekka til $f(x)$ på intervallet $0 < x < \pi$. Bestem summen av rekka

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(2m+1) - \cos(4m+2)}{2m+1}.$$

b) Finn alle funksjoner av formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller

(i) $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u + \dfrac{\partial u}{\partial t} \qquad$ for $0 < x < \pi,\ t > 0$

(ii) $\qquad u(0,t) = 0 \quad$ og $\quad u(\pi,t) = 0 \quad$ for $t > 0$.

Bestem, på rekkeform, en løsning $u(x,t)$ av (i) og (ii) som også oppfyller

(iii) $\qquad u(x,0) = f(x) \quad$ for $0 < x < \pi$.

c) La $f^*(x)$ være den odde, 2π-periodiske utvidelsen av $f(x)$. Skisser grafen til $f^*(x)$ på intervallet $0 < x < 2\pi$. Finn, på rekkeform, en partikulær løsning y_p i den generelle løsningen $y = y_h + y_p$ av differensialligningen

$$y'' + 3y = f^*(x).$$

Oppgave 3

Vis at den Fouriertransformerte $\widehat{f}(w) = (1/\sqrt{2\pi}\,)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx$ av funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases} \qquad \text{er} \qquad \widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+iw)}.$$

Bruk konvolusjonsregelen til å finne den inverse Fouriertransformerte av funksjonen

$$\widehat{h}(w) = \frac{1}{(1+iw)^2}.$$

Oppgave 4

Bruk Laplacetransformasjon (med hensyn på t) til å finne $w(x,t)$ for $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ når

$$2x\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w(x,0) = 0 \text{ for alle } x, \quad w(0,t) = t^2 \text{ for } t \geq 0.$$

Oppgave 5
I hele oppgaven skal vi interpolere den ukjente funksjonen $f(x)$.

a) Bruk Lagrange-interpolasjon og vis at interpolasjonspolynomet som er lik $f(x)$ i følgende tre datapunkter

x	1	2	3
$f(x)$	1	8	27

kan skrives som $P_2(x) = 6x^2 - 11x + 6$.

Hvis vi isteden hadde brukt Newton-interpolasjon, ville da svaret blitt det samme? Forklar. (Merk, det er ikke nødvendig å regne ut svaret ved hjelp av Newton-interpolasjon.)

b) I oppgave **a)** interpolerte vi $f(x)$ i tre punkter. Du skal nå interpolere $f(x)$ for $x = -1$ i tillegg til punktene fra oppgave **a)**. Du får oppgitt at $f(-1) = -1$. Bruk tankegangen bak Newton-interpolasjon og finn interpolasjonspolynomet som interpolerer $f(x)$ i de fire datapunktene. Merk spesielt at du skal ikke gjøre opp igjen arbeidet for de tre punktene i oppgave **a)**, men får oppgitt $P_2(x)$.

$f(x)$ er et tredjegradspolynom. Angi $f(x)$ eksakt og gi en begrunnelse for svaret ditt.

Oppgave 6
Trapesmetoden er en metode for å finne en numerisk tilnærming til et integral, metoden er gitt som

$$I = \int_a^b g(x)\,dx \approx \frac{1}{2}(b-a)(g(a)+g(b)).$$

Vi skal nå se på den ordinære differensialligningen

$$y' = g(y). \tag{1}$$

a) Du skal utlede en metode for å finne numeriske løsninger av (1). Anta at du har et estimat y_n for $y(t_n)$. Integrer ligningen (1) på tidsintervallet $[t_n, t_{n+1}]$. Integrer venstresiden eksakt og bruk trapesmetoden for å tilnærme integralet av høyresiden. Bruk resultatet til å finne en ligning som gir en metode til å finne en tilnærming y_{n+1} til $y(t_{n+1})$.

Hvis du ikke får til oppgave **a)** kan du videre bruke ligningen

$$y_{n+1} = y_n + hg(y_{n+1}).$$

*Merk: Dette er ikke svaret til oppgave **a)**.*

b) La oss nå se spesielt på differensialligningen

$$y' = \frac{50}{y} - 50y. \tag{2}$$

Vi lar $y_0 = y(0)$, og vi ønsker å finne y_1, som er en tilnærming til $y(h)$, hvor $h = 0.1$. Bruk metoden du utledet i oppgave **a)** på denne ligningen. La $u = y_1$ og vis at vi kan skrive

$$Au + B + C\frac{1}{u} = 0,$$

hvor konstantene A, B og C kan avhenge av y_0 og h.

Regn ut verdiene av A, B og C når $y_0 = \sqrt{2}$ og finn $u\,(= y_1)$ med minst 4 korrekte desimaler. Du bestemmer selv hvordan du vil finne u. *Merk: u skal være positiv.*