



Fagleg kontakt under eksamen:

Hans Jakob Rivertz: tlf. 73 55 02 87

EKSAMEN I MATEMATIKK 4N (TMA4130)

Nynorsk

Onsdag 13. desember 2006

kl. 9–13

Hjelpemiddel (kode C): Enkel kalkulator(HP 30S)

Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 12.01.2007

Alle svar skal grunngjevast, og det skal takast med så mykje mellomrekning at det går klart fram kva framgangsmåte som er brukt.

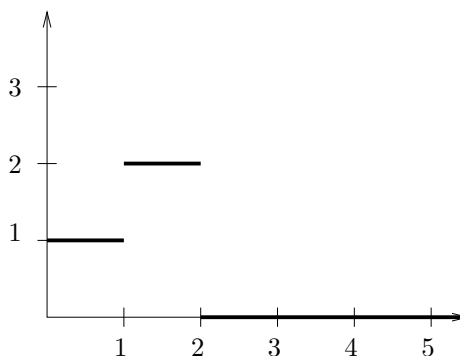
Oppgåve 1

a) Finn $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+s-2)}\right)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s(s^2+s-2)}\right)$ og $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s(s^2+s-2)}\right)$

b) Løys

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = r(t)$$

med $y(0) = y'(0) = 1$. Funksjonen r er gitt av grafen



Oppgave 2 Finn den fouriertransformerte av funksjonen $h(x) = (e^{-x^2} * e^{-x^2})$.

Bruk svaret til å finne eit uttrykk for $h(x)$ utan integralteikn og $*$.

Du kan bruke formelen $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$.

Oppgave 3 Gitt to randverdiproblem

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0, \ x \in (0, 1), \\ u(0, t) = a, & t > 0, \\ u(1, t) = b, & t > 0, \end{cases}$$

med $a, b \in \mathbb{R}$, og

$$(**) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, & t > 0, \ x \in (0, 1), \\ v(0, t) = 0, & t > 0, \\ v(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Hugs at eit randverdiproblem er ei differensiallikning *med* randkrav.

a) Dersom både u_1 og u_2 løyser randverdiproblemet $(*)$ (det vil seie, dersom både u_1 og u_2 er løysingar av $(*)$), kva for randverdiproblem løyser da høvesvis $u_1 + u_2$ og $u_1 - u_2$? Gjeld superposisjonsprinsippet for randverdiproblema $(*)$ og $(**)$?

b) La $u(x, t)$ vere ei løysing av randverdiproblemet $(*)$ og la $v(x, t)$ vere definert ved

$$v(x, t) = u(x, t) - [a + (b - a)x].$$

Vis at $v(x, t)$ løyser randverdiproblemet $(**)$.

Finn alle løysingar av $(**)$ som kan skrivast

$$v(x, t) = F(x)G(t).$$

c) La $a = -1$ og $b = 1$ i $(*)$. Finn løysinga $u(x, t)$ av initial/randverdiproblemet gitt ved $(*)$ og initialkravet

$$(***) \quad u(x, 0) = \sin(\pi x), \ x \in (0, 1).$$

Oppgave 4

a) Finn polynomet $p(t)$ med lågast mogleg grad som interpolerer

t_n	-2	-1	0	1	2
$p(t_n)$	12	0	0	6	12

b) Bruk Simpsons regel til å rekne ut

$$\int_{-2}^2 p(t) dt$$

med knutar (nodes) i punkta -2,-1,0,1,2.

Samanlikn svaret ditt med den nøyaktige verdien av integralet og gjer greie for kva du ser.

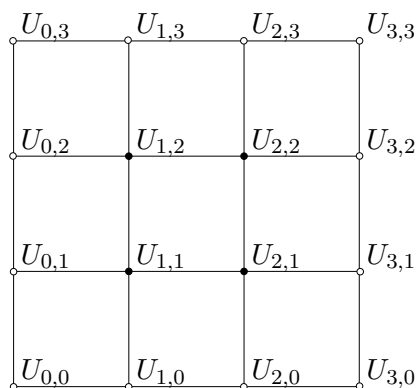
Oppgåve 5 I eit anisotrop materiale med varmekonduktivitet i y -retninga som er dobbelt så stor som den i x -retninga, kan den stasjonære varmelikninga skrivast

$$(1) \quad u_{xx} + 2u_{yy} = 0.$$

Vi vil løyse likninga (1) numerisk. Området er eit kvadrat med sidelengde 1, og randkrava er gitt ved

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u(0, y) = 0 \\ u(x, 1) &= u(1, y) = 1 \end{aligned}$$

for x, y i $[0, 1]$. Vi ser på gitteret i teikninga nedanfor



med $h = \frac{1}{3}$ og $U_{i,j} \approx u(ih, jh)$.

a) Syn at differanseskjemaet som svarer til (1) er

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + 2U_{i,j+1} + 2U_{i,j-1} - 6U_{i,j} = 0.$$

b) Sett opp systemet som $U_{i,j}$ ($i, j = 1, 2$) tilfredstiller og gjer ett skritt ved hjelp av Gauss Seidel iterasjon med startpunktet $U_{1,1}^0 = U_{2,1}^0 = U_{1,2}^0 = U_{2,2}^0 = \frac{1}{2}$.

Tabell over Laplacetransformerte

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n ($n = 0, 1, 2, \dots$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene x_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + \frac{1}{2}hf''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) - \frac{1}{2}hf''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12}h^2f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)} \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \\ \text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \end{aligned}$$

- En 2. ordens Runge-Kutta metode (Heun) for $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= h \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{K}_2 &= h \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2} (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \end{aligned}$$