

Forelesning 5. september 2006 TMA 4130

Eksempelet på slutten av forelesningen 4. september var ikke av det enkleste. Jeg gir derfor en variant av eksempel 1 i læreboka.

Figur

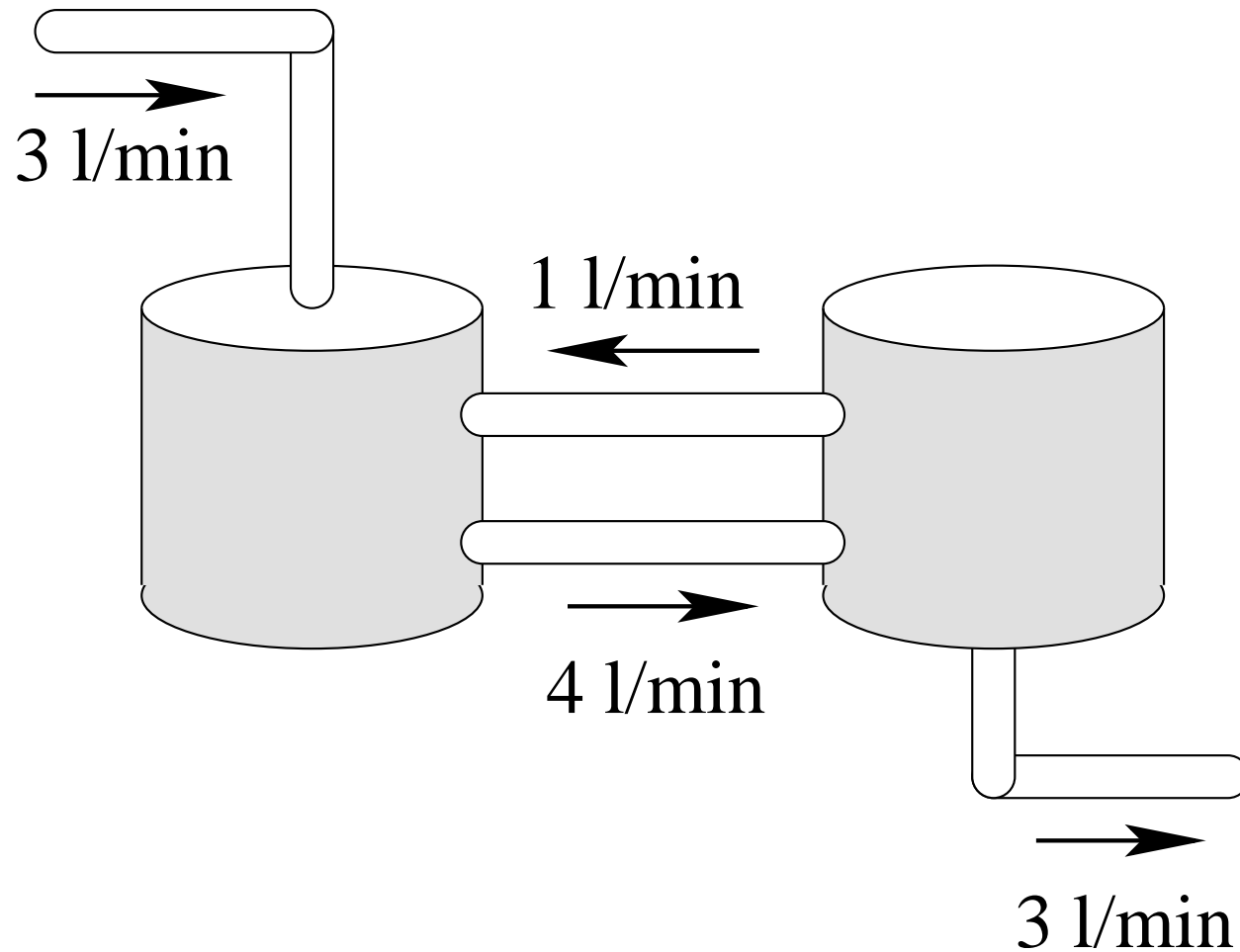


Figure 1: Figur som beskriver problemet

Beskrivelse av problemet

- Vi har to beholdere, hver på 1 liter.

Beskrivelse av problemet

- Vi har to beholdere, hver på 1 liter.
- Fra utsiden tilføres **beholder 1** en saltoppløsning på 1g per liter og med rate 3 liter i minuttet.

Beskrivelse av problemet

- Vi har to beholdere, hver på 1 liter.
- Fra utsiden tilføres **beholder 1** en saltoppløsning på 1g per liter og med rate 3 liter i minuttet.
- Det renner 4 liter oppløsning fra **beholder 1** til **beholder 2**.

Beskrivelse av problemet

- Vi har to beholdere, hver på 1 liter.
- Fra utsiden tilføres **beholder 1** en saltoppløsning på 1g per liter og med rate 3 liter i minuttet.
- Det renner 4 liter oppløsning fra **beholder 1** til **beholder 2**.
- Det renner 1 liter oppløsning fra **beholder 2** til **beholder 1** i et annet rør.

Beskrivelse av problemet

- Vi har to beholdere, hver på 1 liter.
- Fra utsiden tilføres **beholder 1** en saltoppløsning på 1g per liter og med rate 3 liter i minuttet.
- Det renner 4 liter oppløsning fra **beholder 1** til **beholder 2**.
- Det renner 1 liter oppløsning fra **beholder 2** til **beholder 1** i et annet rør.
- Til utsiden renner det 3 liter i minuttet fra **beholder 2**.

Beskrivelse av problemet

- Vi har to beholdere, hver på 1 liter.
- Fra utsiden tilføres **beholder 1** en saltoppløsning på 1g per liter og med rate 3 liter i minuttet.
- Det renner 4 liter oppløsning fra **beholder 1** til **beholder 2**.
- Det renner 1 liter oppløsning fra **beholder 2** til **beholder 1** i et annet rør.
- Til utsiden renner det 3 liter i minuttet fra **beholder 2**.
- Ved tiden $t = 0$ lar vi konsentrasjonen av salt i **beholder 1** være 0 og konsentrasjonen av salt i **beholder 2** være 1 gram/liter.

Oppsett av likninger

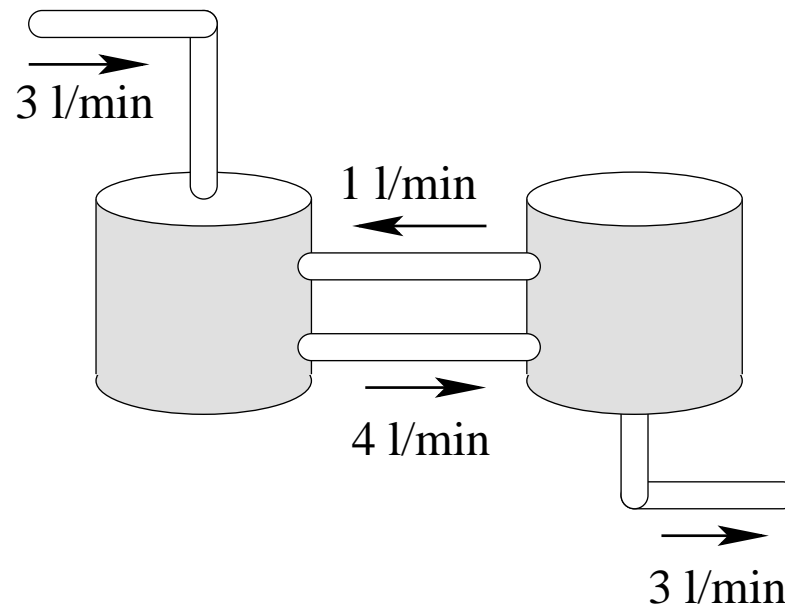
La $y_1(t)$ være saltkonsentrasjonen målt i gram per liter i **beholder 1** ved tiden t

La $y_2(t)$ være saltkonsentrasjonen i **beholder 2** ved tiden t .

Oppsett av likninger

Vi setter opp likningene:

$$y_1'(t) = -4y_1(t) + y_2(t) + 3$$
$$y_2'(t) = 4y_1(t) - 4y_2(t)$$



Første trinn

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= -4y_1(t) + y_2(t) + 3 \\y_2'(t) &= 4y_1(t) - 4y_2(t)\end{aligned}$$

Vi tar Laplacetransform på V.S og H.S av begge likninger.

$$\begin{aligned}sY_1 &= -4Y_1 + Y_2 + \frac{3}{s} \\sY_2 - 1 &= 4Y_1 - 4Y_2\end{aligned}$$

Første trinn

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= -4y_1(t) + y_2(t) + 3 \\y_2'(t) &= 4y_1(t) - 4y_2(t)\end{aligned}$$

Vi tar Laplacetransform på V.S og H.S av begge likninger.

$$\begin{aligned}sY_1 &= -4Y_1 + Y_2 + \frac{3}{s} \\sY_2 - 1 &= 4Y_1 - 4Y_2\end{aligned}$$

Vi har brukt formelen

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$$

Opprydding

$$\begin{aligned} sY_1 &= -4Y_1 + Y_2 + \frac{3}{s} \\ sY_2 - 1 &= 4Y_1 - 4Y_2 \end{aligned}$$

Vi samler Y_1 - og Y_2 -leddene på V.S. og samler resten av leddene på H.S.

$$\begin{aligned} (s + 4)Y_1 - Y_2 &= \frac{3}{s} \\ -4Y_1 + (s + 4)Y_2 &= 1 \end{aligned}$$

Løsning av likningsett

$$\begin{aligned}(s + 4)Y_1 - Y_2 &= \frac{3}{s} \\ -4Y_1 + (s + 4)Y_2 &= 1\end{aligned}$$

Vi løser så dette likningssettet med hensyn på Y_1 og Y_2

$$\begin{aligned}Y_1 &= \frac{4(s + 3)}{s(s^2 + 8s + 12)} \\ Y_2 &= \frac{s^2 + 4s + 12}{s(s^2 + 8s + 12)}\end{aligned}$$

Omformer nevnerene

$$Y_1 = \frac{4(s+3)}{s(s^2+8s+12)}$$
$$Y_2 = \frac{s^2+4s+12}{s(s^2+8s+12)}$$

Bruker at $s^2 + 8s + 12 = (s + 2)(s + 6)$ og får

$$Y_1 = \frac{4(s+3)}{s(s+2)(s+6)}$$
$$Y_2 = \frac{s^2+4s+12}{s(s+2)(s+6)}$$

Delbrøkoppspalting

$$Y_1 = \frac{4(s+3)}{s(s+2)(s+6)}$$
$$Y_2 = \frac{s^2 + 4s + 12}{s(s+2)(s+6)}$$

Vi delbrøkoppspalter

$$Y_1 = -\frac{1}{2(s+6)} - \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{s}$$
$$Y_2 = \frac{1}{s+6} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s}$$

Invers Laplacetransform

$$Y_1 = -\frac{1}{2(s+6)} - \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{s}$$
$$Y_2 = \frac{1}{s+6} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s}$$

Vi tar til slutt invers Laplacetransformasjon på V.S og H.S av likningene

$$y_1 = -\frac{1}{2}e^{-6t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + 1$$
$$y_2 = e^{-6t} - e^{-2t} + 1$$