NTNU

Det skapende universitet

Forelesning Matematikk 4N

Hans Jakob Rivertz
Institutt for matematiske fag

11. september 2006

Den høyrederiverte og venstrederiverte

Definisjon

Den *høyrederiverte* til en funksjon $f(x)$ i punktet x er definert ved grenseverdien

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+|h|) - f(x+0)}{|h|}$$

Eksempel: Den høyrederiverte til $f(x) = |x|$ i punktet 0 er

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+|h|) - f(0)}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - 0}{|h|} = 1$$

NTNU
Det skapende universitet

Den høyrederiverte og venstrederiverte

Definisjon

Den *venstrederiverte* til en funksjon $f(x)$ i punktet x er definert ved grenseverdien

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x-|h|) - f(x-0)}{-|h|}$$

Eksempel: Den venstrederiverte til $f(x) = |x|$ i punktet 0 er

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0-|h|) - f(0)}{-|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - 0}{-|h|} = -1$$

NTNU

Det skapende universitet

Konvergens av fourierrekker

— La $f(x)$ være en periodisk funksjon med periode $p = 2\pi$.

— Anta at integralene i Euler-formelene under eksisterer

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

— Vi ønsker å vite når

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,. \tag{1}$$

— Om (1) holder så sier vi at summen på H.S. *konvergerer* mot $f(x)$.

NTNU
Det skapende universitet

Konvergens av fourierrekker

Teorem

Hvis en periodisk funksjon $f(x)$ *med periode* $p = 2\pi$

1. *er stykkvis kontinuelig på intervallet* $-\pi \leq x \leq \pi$
2. *har venstrederivert og høyrederivert i hvert punkt i intervallet*

Da gjelder

a) *fourierrekken til* $f(x)$ *er konvergent,*

b) *dens sum er lik* $f(x)$ *for alle* x *bortsett fra i sprangene til* $f(x)$*.*

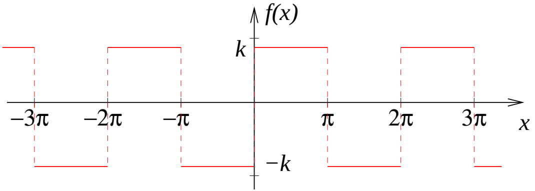
c) *I sprangene er summen gjennomsnittet av høyre og venstre grenseverdi til* $f(x)$*.*

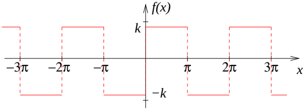
NTNU
Det skapende universitet

Konvergens av fourierrekker

Eksempel: Firkantbølgen

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi \leq x \leq 0 \\ k & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} ;\, f(x+2\pi) = f(x).$$



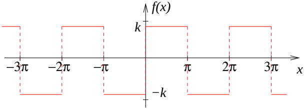


Firkantbølgen har fourier rekken

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left\{\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots\right\}$$

Fra teoremet har vi at summen konvergerer til $f(x)$ for alle x bortsett fra i sprangene.

NTNU
Det skapende universitet



Sprangene til firkantbølgen er i punktene $x = m\pi$ for et hvert heltall $m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.
I sprangene er hvert ledd i fourierrekken til firkantbølgen lik 0 siden $\sin x$, $\sin 3x$, $\ldots$ etc. er lik null for $x = \ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$.
Dette stemmer med punkt c) i teoremet.

Funksjoner med periode $p = 2L$

I kapittel 10.1 så vi på periodiske funksjoner med periode $p = 2\pi$. Dette var for enkelthets skyld. Legg merke til at funksjonenene

$$1, \sin\frac{\pi}{L}x, \sin\frac{\pi}{L}x, \cos\frac{2\pi}{L}x, \sin\frac{2\pi}{L}x, \ldots, \cos\frac{n\pi}{L}x, \sin\frac{n\pi}{L}x, \ldots, ...$$

alle er av periode $2L$. Dette motiverer følgende definisjon:

Funksjoner med periode $p = 2L$

Definisjon

Fourierrekken til en funksjon $f(x)$ med periode $p = 2L$ er gitt ved

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right\}.$$

NTNU
Det skapende universitet

Eulerlikningene

Setning

Fourierkoeffisientene *til* $f(x)$ *er gitt ved Eulerlikningene*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx \end{aligned}$$

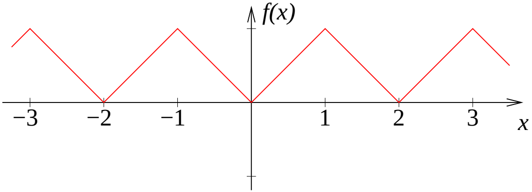
NTNU
Det skapende universitet

Eksempel

Eksempel: Finn fourierrekken til den periodiske funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} -x & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

med periode $p = 2 = 2L$ med $L = 1$.



Figur: $f(x)$

NTNU
Det skapende universitet

Eksempel

Løsning: Vi finner først a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_{-1}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{1} x dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

NTNU

Det skapende universitet

Eksempel

Vi finner så a_n for $n = 1, 2, \ldots$:

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x dx = \int_{-1}^{0} -x \cos n\pi x dx + \int_{0}^{1} x \cos n\pi x dx$$

$$- \left[\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \right]_{0}^{1}$$

$$= - \left[0 + \frac{1}{n^2\pi^2} \right] + \left[0 + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi \right] + \left[0 + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi \right]$$

$$- \left[0 + \frac{1}{n^2\pi^2} \right] = 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$$

NTNU

Det skapende universitet

Eksempel

Vi finner b_n for $n = 1, 2, \ldots$ på tilsvarende måte:

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sin n\pi x dx = \int_{-1}^{0} -x \sin n\pi x dx + \int_{0}^{1} x \sin n\pi x dx =$$

$$= - \left[-\frac{x}{n\pi} \cos n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \sin n\pi x \right]_{-1}^{0}$$

$$+ \left[-\frac{x}{n\pi} \cos n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \sin n\pi x \right]_{0}^{1}$$

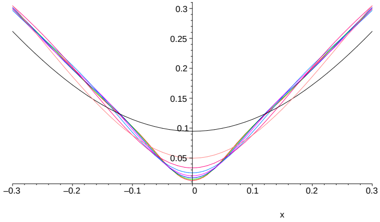
$$= - [-0 + 0] + \left[-\frac{-1}{n\pi} \cos n\pi + 0 \right]$$

$$+ \left[-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi + 0 \right] - [-0 + 0] = 0 \quad (2)$$

NTNU
Det skapende universitet

Eksempel

Dvs at $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = 0$ for jevne $n > 1$, $a_n = -\frac{4}{n^2\pi^2}$ for odde n og $b_n = 0$ for alle $n > 0$.



Figur: Fourierrekken til $f(x)$

Jevne og Odde funksjoner

Definisjon

En funksjon $f(x)$ er *jevn* hvis

$$f(-x) = f(x)$$

for alle x.

Eksempel: Funksjonen $\cos x$ er jevn: $\cos(-x) = \cos x$.

NTNU
Det skapende universitet

Jevne og Odde funksjoner

Definisjon

En funksjon $g(x)$ er *odde* hvis

$$g(-x) = -g(x)$$

for alle x.

Eksempel: Funksjonen $\sin x$ er odde: $\sin(-x) = -\sin x$.

NTNU
Det skapende universitet

Jevne og Odde funksjoner

Setning

Endel fakta om odde og jevne funksjoner

- *Om $f(x)$ er en jevn funksjon så er*

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

- *Om $g(x)$ er en odde funksjon så er*

$$\int_{-L}^{L} g(x)dx = 0$$

NTNU
Det skapende universitet

Jevne og Odde funksjoner

- Produktet av en odde og en jevn funksjon er odde.
- Produktet av to odde funksjoner er jevn.
- Produktet av to jevne funksjoner er jevn.
- Om $h(x)$ er en vilkårlig funksjon så er
  a) $h(x) + h(-x)$ en jevn funksjon
  b) $h(x) - h(-x)$ en odde funksjon

NTNU
Det skapende universitet

Jevne og Odde funksjoner

Setning

Enhver funksjon kan skrives som en sum av odde og jevne funksjoner

Bevis: La $f(x)$ være en vilkårlig funksjon. Definer $f^+(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ og $f^-(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. Da er $f^+(x) + f^-(x) = f(x)$. Videre er $f^+(-x) = f^+(x)$ og $f^-(-x) = -f^-(x)$. $\square$

NTNU
Det skapende universitet

Jevne og Odde funksjoner

Teorem

Fourierrekken av en jevn funksjon med periode $p = 2L$ *er en* fourier-cosinusrekke

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x,$$

med koeffisienter

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

for $n = 1, 2, \ldots$.

NTNU
Det skapende universitet

Jevne og Odde funksjoner

Teorem

Fourierrekken av en odde funksjon med periode $p = 2L$ er en fourier-sinusrekke

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

med koeffisieneter

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

.

NTNU
Det skapende universitet

Jevne og Odde funksjoner

Teorem

Fourierkoeffisientene til summen av to periodiske funksjoner er summen av fourierkoeffisientene til hver av funksjonene.

Eksempel: Finn fourier rekken til en rektangulær bølge. La $f(x)$ være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 2k & 0 < x < \pi \end{cases}$$