NTNU

Det skapende universitet

Forelesning Matematikk 4N

Hans Jakob Rivertz
Institutt for matematiske fag

12. september 2006

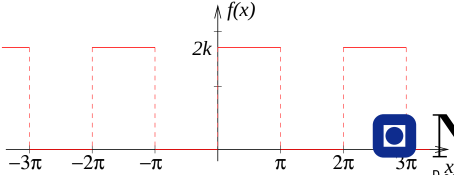
Siste eksempel fra 11/9-06

Teorem

Fourierkoeffisientene til summen av to periodiske funksjoner er summen av fourierkoeffisientene til hver av funksjonene.

Eksempel: Finn fourier rekken til en rektangulær bølge. La $g(x)$ være gitt ved

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 2k & 0 < x < \pi \end{cases}$$



Løsning:

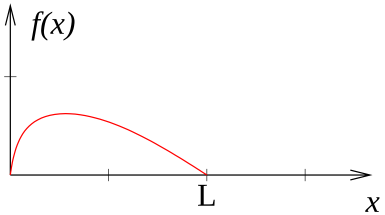
Vi skriver om funksjonen $g(x) = k + f(x)$ der $f(x)$ er funksjonen fra 3.je eksempel i forelesningen 9/11 2006. Vi får $a_0 = k$ og ellers er verdiene som i 3.je eksempel:

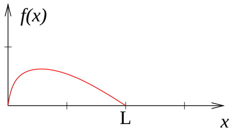
$$f(x) = k + \frac{4k}{\pi}\left\{\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots\right\}$$

NTNU
Det skapende universitet

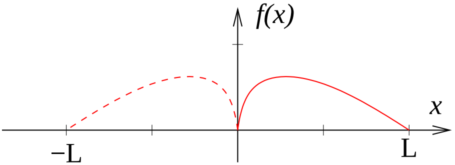
Halvperiode-utvidelser

I anvendelser vil ofte funksjonene være definert på et endelig intervall, si $0 \leq x \leq L$.

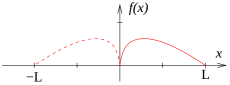




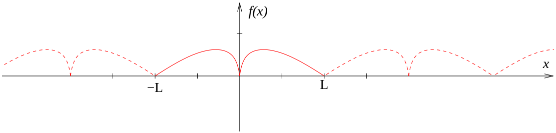
Om vi speiler denne figuren om andre-aksen [1] så får vi.



[1] y-aksen

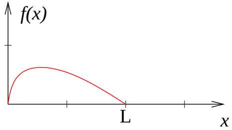


Gjentar vi denne funksjonen med intervall $2L$ får vi følgende figur

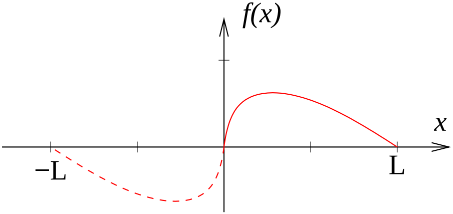


Denne funksjonen kalles for den *jevne periodiske utvidelsen* av $f(x)$.

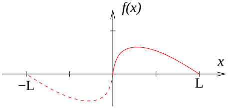
NTNU
Det skapende universitet



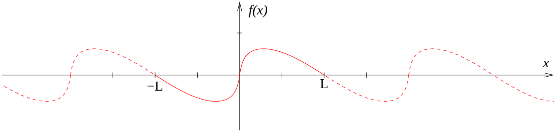
Om vi speiler denne figuren om origo så får vi.



NTNU
Det skapende universitet



Gjentar vi denne funksjonen med intervall $2L$ får vi følgende figur



Denne funksjonen kalles for den *odde periodiske utvidelsen* av $f(x)$.

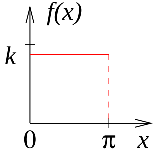
NTNU
Det skapende universitet

Den jevne periodiske utvidelsen og den odde periodiske utvidelsen kalles for *halvperiodeutvidelser*.

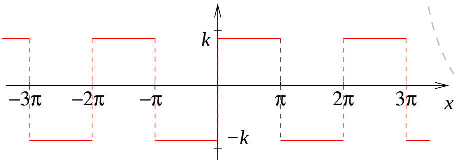
NTNU
Det skapende universitet

Eksempel: Finn de to halvperiodiske utvidelsene til funksjonen

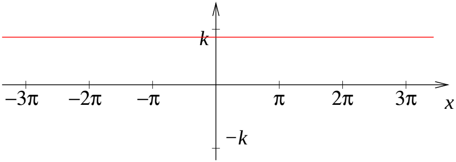
$$f(x) = k; \quad 0 \le x \le \pi$$



Den odde utvidelsen til $f(x)$ er firkantpulsen.



Den jevne utvidelsen til $f(x)$ er den konstante funksjonen.



NTNU
Det skapende universitet

Setning

*Fourier-**cosinus**rekken til en funksjon $f(x)$ gitt på intervallet $0 \leq x \leq L$ er lik fourier-rekken til den **jevne** periodiske utvidelsen av $f(x)$.*

Setning

*Fourier-**sinus**rekken til en funksjon $f(x)$ gitt på intervallet $0 \leq x \leq L$ er fourier-rekken til den **odde** periodiske utvidelsen av $f(x)$.*

NTNU
Det skapende universitet

Legg merke til at vi kan velge hvilken tranform vi vil ta. Ta funksjonen i forige eksempel ($f(x) = k; \quad 0 \leq x \leq \pi$).
Fourier-sinusrekken er fourierrekken til firkantpulsen:

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left\{ \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots \right\}.$$

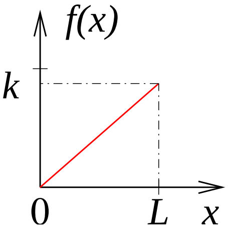
Fourier-cosinusrekken er meget enkel:

$$f(x) = k$$

NTNU
Det skapende universitet

Eksempel: Finn fourierrekkene til de to halvperiodiske utvidelsene til funksjonen

$$f(x) = \frac{k}{L}x; \quad 0 \le x \le L$$



Løsning: Vi finner

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{k}{L^2}\int_0^L x dx$$

$$= \frac{k}{L^2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^L = \frac{k}{2}$$

NTNU
Det skapende universitet

Vi finner videre

$$a_n = \frac{2k}{L^2}\int_0^L x\cos\frac{n\pi}{L}x dx$$

$$= \frac{2k}{L^2}\left\{\left[\frac{xL}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L - \int_0^L \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x dx\right\}$$

$$= \frac{2k}{L^2}\left\{0 - 0 - -\left[\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L\right\}$$

$$= \begin{cases} -\frac{4k}{n^2\pi^2} & n \text{ odde} \\ 0 & n \text{ jevn} \end{cases}$$

NTNU
Det skapende universitet

Vi finner videre

$$b_n = \frac{2k}{L^2}\int_0^L x \sin\frac{n\pi}{L}x dx$$

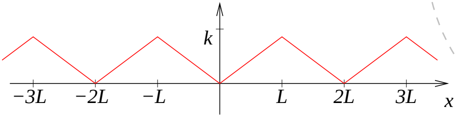
$$= \frac{2k}{L^2}\left\{-\left[\frac{xL}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L + \int_0^L \frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x dx\right\}$$

$$= \frac{2k}{L^2}\left\{-\left[\frac{xL}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L + \left[\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L\right\}$$

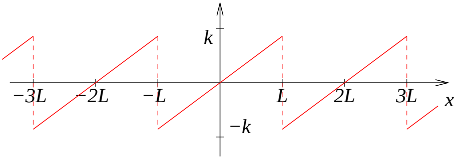
$$= -\frac{2k}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{2k}{n\pi}(-1)^n$$

NTNU
Det skapende universitet

Figur for den jevne halvperiodiske utvidelsen



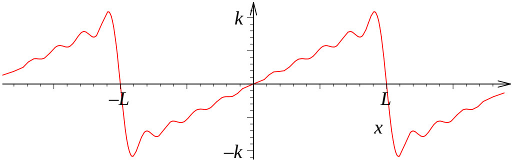
Figur for den odde halvperiodiske utvidelsen



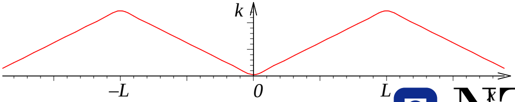
NTNU
Det skapende universitet

Valg av transform

Om vi tar med 10 ledd i sinusrekken i eksempelet over så får vi følgende tilnærming:



Om vi tar med 10 ledd i cosinusrekken i eksempelet over så får vi følgende tilnærming:



NTNU
Det skapende universitet

Legg merke til at om målet er å få best mulig tilnærming av funksjonen i forrige eksempel på intervallet $0 \leq x \leq L$ så vil det lønne seg å velge cosinusrekken fremfor sinus rekken.

- Hvorfor er det slik?
- Vil det alltid være slik?

NTNU
Det skapende universitet

Komplekse fourier rekker (10.5)