NTNU

Det skapende universitet

Forelesning Matematikk 4N

Hans Jakob Rivertz
Institutt for matematiske fag

18. september 2006

Komplekse fourier rekker (10.5)

Målet med denne leksjonen er

- vise hvordan man skrive fourier rekkene på kompleks form
- vise ved et eksempel at på denne formen så kan utregninger forenkles.

Eulers Formel

Eulers formel sier at

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

der i er den imaginære enheten $i = \sqrt{-1}$.
Om vi setter inn $-x$ istedet for x i Eulers formel så får vi

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \cos x + i\sin x && (1)\\
e^{-ix} &= \cos x - i\sin x && (2)
\end{aligned}
$$

Om vi adderer uttrykkene for e^{ix} og e^{-ix} og deler på 2 så får vi

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

Om vi subtraherer de samme utrykkene og deler på $2i$ så får vi

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

NTNU
Det skapende universitet

La $f(x)$ være en periodisk funksjon med periode 2π
Betrakt fourierrekken

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Vi vil skrive om denne ved hjelp av formelene for $\cos x$ og $\sin x$ over.

Det skapende universitet

Vi repeterer

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$
$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

og setter inn i uttrykket

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{a_n}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$

$$= \frac{a_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n}{2}e^{-inx} + \frac{b_n}{2i}e^{inx} - \frac{b_n}{2i}e^{-inx}$$

$$= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}$$

NTNU
Det skapende universitet

Vi har altså

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}$$

Vi lar

- $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$
- $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$

Da er

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$$

NTNU
Det skapende universitet

Repeterer

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

La i tillegg c_0 vare gitt ved

- $c_0 = a_0$

Vi kan nå skrive fourierrekken over som

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$$

Dette forenkler vi videre til

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

NTNU
Det skapende universitet

Den komplekse fourierrekken

Denne er så elegant at den fortjener en egen side:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Vi kaller denne for den *komplekse fourierrekken* til $f(x)$.

NTNU
Det skapende universitet

Utregning av komplekse koeffisientene

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Vi vil finne koeffisientene c_n for $n = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
Disse koeffisienetene er gitt ved én formel.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Vi vil bevise formelen

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

direkte.

Bevis. Sett inn $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}$ for $f(x)$ i H.S.:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i(m-n)x}dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}dx$$

NTNU
Det skapende universitet

Betrakt integralet

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx$$

1. Når $m = n$ er integranden 1 og vi får verdien 2π
2. Når $m \neq n$ blir integralet 0:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx = \left[\frac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)x}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{i(m-n)}\left(e^{i(m-n)\pi} - e^{-i(m-n)\pi}\right) = \frac{2}{m-n}\sin(m-n)\pi = 0$$

NTNU
Det skapende universitet

Vi repeterer fra 2 foiler siden:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}dx$$

Vi viste over at alle leddene i summen er null bortsett fra når $m = n$.

Vi har derfor at H.S. er $c_n \frac{1}{2\pi} 2\pi = c_n$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = c_n$$

som vi ønsket å bevise.

NTNU
Det skapende universitet

Periode $2L$

Definisjon

Om perioden er $2L$ istedet for 2π så er den komplekse fourierrekken definert ved

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

Setning

Dens coeffisienter er gitt ved

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx$$

Eksempel

Finn den komplekse fourierrekken til den periodiske funksjonen

$$f(x) = e^x \qquad (-\pi < x < \pi)$$

med periode 2π. Dvs $f(x+2\pi) = f(x)$.

Løsning: Vi regner ut integralet

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left[e^x e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n$$

Vi brukte at $e^{\pm i\pi} = -1$.

NTNU
Det skapende universitet

Vi repeterer fra forige foil

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n$$

Husk at $\sinh x$ er definert ved

$$\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Da har vi

$$c_n = \frac{\sinh \pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1-in} = \frac{\sinh \pi}{\pi}\frac{(-1)^n(1+in)}{1+n^2}$$

Så den komplekse fourierrekken til $f(x)$ er gitt ved

$$e^x \sim \frac{\sinh \pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+in)}{1+n^2}e^{inx}$$

NTNU
Det skapende universitet

Oversettelse til “reelle” fourierrekker

Vi regnet ut de komplekse fourier koeffisientene til e^x:

$$c_n = \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^n(1+in)}{1+n^2}$$

Vi vil nå finne de reelle koeffisientene.

$$= \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)} + i \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{n(-1)^n}{(1+n^2)}$$

Vi definerte $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ så vi har

$$a_n = \frac{2\sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)}, \quad b_n = -\frac{2\sinh \pi}{\pi} \frac{n(-1)^n}{(1+n^2)}$$

og

$$a_0 = c_0 = \frac{\sinh \pi}{\pi}$$

NTNU
Det skapende universitet

Approksimering ved Trigonometriske Polynomer 10.7

Mål:

1. Finne “beste” tilnærming av periodiske funksjoner ved trigonometriske polynomer[1]

[1] Vil bli nærmere definert.

NTNU
Det skapende universitet

Tilnærming av funksjoner ved minimering av kvadratfeil

Defi nisjon

En funksjon på formen

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

kalles for et **trigonometrisk polynom** av **grad** N.

(For enkelthets skyld lar vi perioden til funksjonene være 2π.)

NTNU
Det skapende universitet

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

- La $f(x)$ være en periodisk funksjon med periode 2π.
- Hva må $A_0, A_1, ..., B_0, ..., B_N$ være for at $F(x)$ skal være beste tilnærming av $f(x)$?
- Upresist spørsmål!! Vi må først ha en felles forståelse av hva som menes med **beste tilnærming.**

NTNU
Det skapende universitet

Defi nisjon

La $F(x)$ være et trigonometrisk polynom av grad N som tilnærmer den periodiske funksjonen $f(x)$ med periode 2π.Vi definerer **kvadratfeilen** E ved

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (F - f)^2 dx.$$

At $F(x)$ er **beste tilnærming** av $f(x)$ betyr at $F(x)$ minimerer kvadratfeilen E. For å kunne jobbe med E må vi forenkle. Dette starter jeg med nå:

Det skapende universitet

Vi har at

$$(f - F)^2 = f^2 - 2fF + F^2.$$

Setter vi dette inn i utrykket for E, får vi

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} fF dx + \int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx.$$

NTNU
Det skapende universitet

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} fF dx + \int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx.$$

La $f(x)$ ha fourier utvikling

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Repeterer at $F(x)$ er gitt ved

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

Vi vil regne ut:

$$\int_{-\pi}^{\pi} fF dx \quad \text{og} \quad \int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx$$

NTNU
Det skapende universitet

Vi bruker at det trigonometriske systemet

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin nx, \cos nx, \ldots$$

er ortogonalt.Dvs at

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0, \forall m, n \in \mathbf{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0, \forall m \neq n \in \mathbf{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0, \forall m \neq n \in \mathbf{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \text{ og}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

NTNU
Det skapende universitet

Bruker vi dette kan vi regne ut integralene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} fF dx = \pi \left\{ 2A_0 a_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n a_n + B_n b_n) \right\}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx = \pi \left\{ 2A_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (A_n^2 + B_n^2) \right\}$$

NTNU
Det skapende universitet

Følgelig har vi

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\pi \left\{ 2A_0 a_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n a_n + B_n b_n) \right\}$$
$$+ \pi \left\{ 2A_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (A_n^2 + B_n^2) \right\}$$

Om vi setter koeffisienetene til $F(x)$ lik koeffisientene til de første N leddene til fourierrekken til $f(x)$:

$$A_0 = a_0, A_1 = a_1, ..., B_N = b_n,$$

så får vi kvadratfeilen

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

NTNU
Det skapende universitet

Differansen mellom E og E^* er

$$E - E^* = \pi \left\{ 2(A_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^{N} [(A_n - a_n)^2 + (B_n - b_n)^2] \right\}$$

Det betyr at $E - E^* \geq 0$ og derfor er $E \geq E^*$ for alle trigonometriske polynomer av grad N. Dvs at E^* er minimum for kvadratfeilen og at

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

er den beste tilnærmelsen til $f(x)$.

NTNU
Det skapende universitet

Setning

Den beste tilnærming av $f(x)$ved trigonometriske polynomer av grad N er de N første leddene av fourier rekken til $f(x)$:

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

NTNU
Det skapende universitet

Besselulikheten og Parsevals teorem

Siden $E \geq 0$ så har vi

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right\} \geq 0$$

for alle N. Om vi lar N gå mot uendelig får vi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx \geq \pi \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

Denne ulikheten kalles for **besselulikheten**.

NTNU
Det skapende universitet

Parsevals teorem

Om det er slik at integralet på H.S. eksisterer så sier Parsevals teorem at vi har likhet:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = \pi \left\{ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

NTNU
Det skapende universitet

Eksempel: La periodiske funksjonen $f(x)$ med periode 2π være gitt ved

$$f(x) = |x|, \qquad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

Dens fourier rekke er gitt ved

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

Vi finner

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = \frac{2\pi^3}{3}$$

Kvadratfeilen for den beste tilnærmingen for $N = 5$ blir

$$E^* = \frac{2\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{2} - \frac{16}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4}\right) \approx 0.0037$$

NTNU

Det skapende universitet