EKSAMEN I MATEMATIKK 4N/D (TMA4130/5)

13. desember 2006

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Vi har

$$\frac{1}{s(s^2+s-2)} = \frac{1}{s(s-1)(s+2)}$$

og, etter delbrøksoppspaltning, får vi

$$\frac{1}{s(s^2+s-2)} = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{3(s-1)} + \frac{1}{6(s+2)}.$$

Derfor, fra Laplacetabellen,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+s-2)}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{-2t}.$$

Vi bruker s-forskyningsreglen og får:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s(s^2+s-2)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+s-2)}\right)(t-1)u(t-1)\\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{t-1} + +\frac{1}{6}e^{-2(t-1)}\right)u(t-1)\end{aligned}$$

Vi bruker s-forskyningsreglen en gang til:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s(s^2+s-2)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+s-2)}\right)(t-2)u(t-2)\\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{t-2} + +\frac{1}{6}e^{-2(t-2)}\right)u(t-2)\end{aligned}$$

b) Fra grafen ser vi at

$$r(t) = u(t) + u(t-1) - 2u(t-2)$$

Vi anvender Laplacetransformen til den ordinære differentialle ligningen og får

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + sY - y(0) - 2Y = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s}$$

som gir

$$Y = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s(s^2+s-2)} + \frac{e^{-s}}{s(s^2+s-2)} - 2\frac{e^{-2s}}{s(s^2+s-2)}$$

Vi bruker punktet **a)** og får

$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{-2t} \\ + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{t-1} + \frac{1}{6}e^{-2(t-1)}\right) u(t-1) \\ + \left(1 - \frac{2}{3}e^{t-2} - \frac{1}{3}e^{-2(t-2)}\right) u(t-2). \end{aligned}$$

Oppgave 2 Vi bruker formlen (Rottman s.176):

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

og får

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(h) &= \mathcal{F}(e^{-x^2} * e^{-x^2}) \\ &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(e^{-x^2})\mathcal{F}(e^{-x^2}) \\ &= \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{w^2}{4}}\right)^2. \end{aligned}$$

Derfor,

$$\mathcal{F}(h) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{w^2}{2}}.$$

For $a = \frac{1}{2}$, formlen som er gitt i oppgaveteksten gir $\mathcal{F}(e^{-\frac{1}{2}x^2}) = e^{-\frac{w^2}{2}}$. Derfor,

$$h = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(h) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{w^2}{2}})$$

og

$$h = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Oppgave 3

a) Ved innsetting ser vi at:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 \pm u_2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1 \pm u_2) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) \pm \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) = 0,$$

og

$$\begin{aligned} (u_1+u_2)(0,t) &= 2a, \qquad & (u_1-u_2)(0,t) &= 0, \\ (u_1+u_2)(1,t) &= 2b, \qquad & (u_1-u_2)(1,t) &= 0. \end{aligned}$$

Superposisjonsprinsippet holder for (*) dersom $Au_1(x,t) + Bu_2(x,t)$ også løser (*) for alle reelle tall A og B:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au_1 + Bu_2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Au_1 + Bu_2) = A\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) + B\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) = 0,$$

og

$$(Au_1 + Bu_2)(0,t) = (A+B)a \quad \text{og} \quad (Au_1 + Bu_2)(1,t) = (A+B)b,$$

dvs. $Au_1(x,t) + Bu_2(x,t)$ løser (*) bare når $a = 0 = b$. Dermed holder superposisjonsprinsippet ikke for (*) når a eller b er ulik null. Men det holder for (**) siden (**) svarer til (*) med $a = 0 = b$.

b) Legg merke til at $v_t = u_t$, $v_{xx} = v_{xx}$, $v(0,t) = u(0,t) - a$ og $v(1,t) = u(1,t) - b$. Siden u oppfyller (*), ser vi at v må oppfylle (**).

Randverdiproblemet (**) er løst i Kreyszig, se der for detaljer i utregningen. Innsetting av $v(x,y) = F(x)G(t)$ i (**) gir

$$\begin{aligned} &G'(t) = kG(t) \quad \text{for } t > 0, \\ &F''(t) = kF(t) \quad \text{for } 0 < x < 1, \\ &F(0) = 0 = F(1), \end{aligned}$$

der k er en konstant. Likningene for F har bare løsning forskjellig fra 0 når $k = -n^2\pi^2$ for $n \in \mathbb{N}$, og da er

$$F_n(x) = K_n \sin(n\pi x) \quad \text{og} \quad G_n(t) = \bar{K}_n e^{-n^2\pi^2 t},$$

for vilkårlige konstanter $K_n, \bar{K}_n$. Alle løsninger på formen $v(x,y) = F(x)G(t)$ er da gitt ved

$$v_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = \underline{A_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}},$$

og der $A_n = K_n \bar{K}_n$ er en vilkårlig konstant.

c) Husk at $a = -1$ og $b = 1$, slik at $u(x,t) = v(x,t) - [-1 + 2x]$. Vi ser da at v løser randverdiproblemet (**) med initialbetingelse

$$v(x,0) = u(x,0) + [-1 + 2x] = \sin(\pi x) + [-1 + 2x]. \tag{1}$$

Fra b) og superposisjon har vi følgende kandidat til løsning av (**) og (1),

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Ved å sette $t = 0$ får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = v(x,0) = \sin \pi x + [-1 + 2x]. \tag{2}$$

Nå finner vi Fourier sin-rekken til $-1 + 2x$ for $0 \le x \le 1$:

$$-1 + 2x = \sum_{n=1}^{n} b_n \sin(n\pi x) \quad \text{for} \quad 0 < x < 1 \quad \text{og} \quad b_n = 2\int_0^1 (-1 + 2x)\sin(n\pi x)\,dx.$$

Delvis integrasjon gir at $b_n = \frac{2}{n\pi}(1 + (-1)^n)$ for $n \in \mathbb{N}$, og fra (2) ser vi dermed at må vi velge

$$A_1 = b_1 + 1 \quad \text{og} \quad A_n = b_n \text{ for } n > 1.$$

Dvs. løsningen v av (**) og (1) er

$$v(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} e^{-4m^2\pi^2 t} \sin(2m\pi x).$$

Her har vi brukt at $b_n = 0$ for n odde og $b_n = \frac{4}{n\pi}$ for $n\,(= 2m)$ like. Løsningen u av (*) og (***) er da

$$u(x,t) = v(x,t) - [-1 - 2x].$$

Oppgave 4

a) Newtons dividerte differans Interpolasjon formel

$$\begin{array}{r|lccccc}
x_j & f_j & f[x_j, x_{j+1}] & f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] & f[x_j, \ldots, x_{j+3}] & f[x_j, \ldots, x_{j+4}] \\
-2 & 12 & & & & \\
 & & -12 & & & \\
-1 & 0 & & 6 & & \\
 & & 0 & & -1 & \\
0 & 0 & & 3 & & 0 \\
 & & 6 & & -1 & \\
1 & 6 & & 0 & & \\
 & & 6 & & & \\
2 & 12 & & & &
\end{array} \tag{1}$$

Interpolasjonen er

$$p(t) = 12 - 12(x+2) + 6(x+2)(x+1) - 1(x+2)(x+1)x = -x^3 + 3x^2 + 4x \qquad (2)$$

b) Integrasjon med Simpson

$$\frac{1}{3}(12 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 12) = 16 \qquad (3)$$

Analytisk integrasjon. 1. og 3. ledd er odde:

$$\int_{-2}^{2} -x^3 + 3x^2 + 4x \, dx = [x^3]_{-2}^{2} = 16 \qquad (4)$$

Simpson's formel for integrasjon ga eksakt resultat.

Feilen til Simpson er gitt ved

$$\frac{h}{12} p^{(4)}(\xi) \qquad (5)$$

der ξ er et element i integrasjonsintervallet. Derivasjon av $p(t)$ gir $p^{(4)}(t) \equiv 0$. Derfor var det forventet at Simpson skulle gi nøyaktig svar.

Oppgave 5

a) Vi tilnærmer den andre deriverte med hensyn på x i punktet $P_{i,j} = (ih, jh)$ ved

$$u_{xx}(P_{i,j}) = \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j}}{h^2}.$$

På den samme måten har vi

$$u_{yy}(P_{i,j}) = \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2U_{i,j}}{h^2}.$$

Ligningen $u_{xx} + 2u_{yy} = 0$ medfører derfor

$$\frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j}}{h^2} + 2\frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2U_{i,j}}{h^2} = 0$$

og

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + 2U_{i,j+1} + 2U_{i,j-1} - 6U_{i,j} = 0.$$

b) I punktet $P_{1,1}$, har vi

$$-6U_{1,1} + U_{2,1} + U_{0,1} + 2U_{1,2} + 2U_{1,0} = 0$$

og, siden $U_{0,1} = U_{1,0} = 0$,

$$-6U_{1,1} + U_{2,1} + 2U_{1,2} = 0. \tag{6}$$

I punktet $P_{2,1}$, har vi

$$U_{3,1} + U_{1,1} + 2U_{2,2} + 2U_{2,0} - 6U_{2,1} = 0$$

og, siden $U_{3,1} = 1$, $U_{2,0} = 0$,

$$U_{1,1} - 6U_{2,1} + 2U_{2,2} = -1. \tag{7}$$

I punktet $P_{1,2}$, har vi

$$U_{2,2} + U_{0,2} + 2U_{1,3} + 2U_{1,1} - 6U_{1,2} = 0$$

og, siden $U_{0,2} = 0$ og $U_{1,3} = 1$,

$$2U_{1,1} - 6U_{1,2} + U_{2,2} = -2. \tag{8}$$

I punktet $P_{2,2}$, har vi

$$U_{3,2} + U_{1,2} + 2U_{2,3} + 2U_{2,1} - 6U_{2,2} = 0$$

og, siden $U_{3,2} = U_{2,3} = 1$,

$$2U_{2,1} + U_{1,2} - 6U_{2,2} = -3 \tag{9}$$

Vi samler ligningene (6), (7), (8) og (9), og vi får den følgende systemet:

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Den første steg av Gauss-Seidels iterasjon er gitt ved

$$\begin{cases} -6U^1_{1,1} + U^0_{2,1} + 2U^0_{1,2} = 0 \\ U^1_{1,1} - 6U^1_{2,1} + 2U^0_{2,2} = -1 \\ 2U^1_{1,1} - 6U^1_{1,2} + U^0_{2,2} = -2 \\ 2U^1_{2,1} + U^1_{1,2} - 6U^1_{2,2} = -3 \end{cases}$$

Vi får

$$U^1_{1,1} = \frac{1}{4},$$

og

$$U^1_{2,1} = -\frac{1}{6}(-1 - 1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{8},$$

og

$$U^1_{1,2} = -\frac{1}{6}(-2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2},$$

og

$$U^1_{2,2} = -\frac{1}{6}(-3 - \frac{1}{2} - \frac{6}{8}) = \frac{17}{24}$$

Derfor,

$$(U^1_{1,1}, U^1_{2,1}, U^1_{1,2}, U^1_{2,2}) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{17}{24}).$$