NTNU
Det skapende universitet

Løsningsforslag for midtsemester Matematikk 4N vår 2006

Hans Jakob Rivertz
Institutt for matematiske fag

Oppgave 1

Finn den Laplacetransformerte til $e^{-t} * \cos t$

Løsning:.

Vi bruker konvolusjonsteroremet som sier

$$\mathscr{L}\{f * g\} = \mathscr{L}\{f\}\mathscr{L}\{g\}$$

Videre er

$$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad \mathscr{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Derfor får vi

$$\mathscr{L}\{e^{-t} * \cos t\} = \mathscr{L}\{e^{-t}\}\mathscr{L}\{\cos t\} = \frac{1}{s+1}\frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{(s^2+1)(s+1)}$$

Dvs svaralternativ A.

Oppgave 2

Finn den laplacetransformerte av følgende initialproblem

$$y''(t) + 4y(t) = \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Der δ er diracs deltafunksjon.

Løsning:

Bruker at

$$\mathscr{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$

Og linearitets teoremet

$$\mathscr{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

der f og g er funksjoner av t og a og b er konstanter.

Laplace av $\delta(t-a)$ er $\mathscr{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Vi tar laplace av V.S. og får

$$\mathscr{L}\{y''(t) + 4y(t)\} = \mathscr{L}\{y''(t)\} + 4\mathscr{L}\{y(t)\}$$

$$= s^2Y(s) + 4Y(s) = (s^2+4)Y(s)$$

Vi tar laplace av H.S. og får

$$\mathscr{L}\{\delta(t-2)\} = e^{-2s}$$

Derfor får vi V.S.=H.S.

$$(s^2+4)Y(s) = e^{-2s}$$

Og deler på s^2+4 på VS og HS

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+4}$$

Dvs Svaralternativ C

Oppgave 3

La $f(t) = (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) - u(t-3) - u(t-4)$. Hva er grafen til $f(t)$. **Løsning:**.

1. I intervallet $(0,1)$ er funksjonen lik 0, derfor utelukker vi svaralternativ A.
2. I intervallet $(1,2)$ har vi at funksjonen er gitt ved $f(t) = t-1$, hvilket kun passer med svaralternativ D.

NTNU
Det skapende universitet

Oppgave 4

Betrakt den 2π periodiske funksjonen $f(t) = \cos^2 t$. La

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

være den utvikling i en kompleks Fourierrekke. Finn koeffisienten c_2.
Løsning: Vi har at for positive n så er $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ der a_n og b_n er koeffisientene i fourierrekken til $f(x)$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

NTNU
Det skapende universitet

Vi har den trigonometrisk identiteten $\cos^2 t = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}$. Dvs at i fourierrekken over så har vi $a_0 = \frac{1}{2}$ og $a_2 = \frac{1}{2}$, (og alle andre koeffisienter = 0).
Da har vi $c_2 = \frac{1}{2}(a_2 + ib_2) = \frac{1}{4}$. Svaralternativ D.

NTNU
Det skapende universitet

Oppgave 5

La f være en jevn 2π-periodisk funksjon slik at $f(t) = t^2/2$ for $o \leq t \leq \pi$. Hva er verdien i $f(7)$?
Løsning: 7 er ikke i intervallet $[0, \pi]$. $7 - 2\pi \approx 0,717$ ligger i intervallet $[0, \pi]$.Siden f er 2π periodisk så er $f(7) = f(7-2\pi) = (7-2\pi)^2/2$. Svaralternativ D.

NTNU
Det skapende universitet

Oppgave 6

Fourierrekken til funksjonen i forige oppgave har formen

$$f(t) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$$

Bruk dette til å finne summen til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

NTNU
Det skapende universitet

Løsning: Siden funksjonen er jevn og periodisk og kontinuerlig på intervallet $(0, \pi)$ så er f kontinuerlig på hele $\mathbb{R}$. Teorem 1 på side 535 sier da at fourierrekken konvergerer mot $f(t)$ i hele $\mathbb{R}$. Spesielt har vi at funksjonsverdien for $t = \pi$ er $f(\pi) = \pi^2/2$. og derfor.

$$\begin{aligned}\pi^2/2 = f(\pi) &= \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi \\ &= \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Vi har derfor

$$\pi^2/2 = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Omformer vi dette får vi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Svaraltenativ D.

NTNU
Det skapende universitet

Oppgave 7

Hva er $f * f$ når f er gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } |t| \le 1/2 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \tag{1}$$

NTNU
Det skapende universitet

Løsning:
Konvolusjonsproduktet er

$$(f * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

1. For $\tau < -1/2$ så er $f(\tau) = 0$ og derfor også integranden $f(\tau)f(t-\tau) = 0$. Dvs at vi kan integrere fra $-1/2$ til uendelig
2. For $\tau > 1/2$ så er $f(\tau) = 0$ og derfor også integranden $f(\tau)f(t-\tau) = 0$. Dvs at vi kan integrere fra $-1/2$ til $1/2$

I intervallet det integreres over er $f(\tau) = 1$ Derfor har vi

$$(f * f)(t) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t - \tau) d\tau$$

Integranden $f(t-\tau)$ er 1 for τ i intervallet $[t - 1/2, t + 1/2]$ og null utenfor dette intervallet.

NTNU
Det skapende universitet

For positive $t < 1$ får vi derfor

$$(f * f)(t) = \int_{t-1/2}^{1/2} f(t-\tau)d\tau = 1 - t$$

Tilsvarende for negative $t > -1$ får vi

$$(f * f)(t) = \int_{-1/2}^{t+1/2} f(t-\tau)d\tau = 1 + t$$

For t utenfor intervallet $[-1, 1]$ så vil

$$[t - 1/2, t + 1/2] \cap [-1/2, 1/2] = \emptyset$$

Integralet vil være null.
Dvs graf B er riktig svar.

NTNU
Det skapende universitet

Oppgave 8

(NB. Feil i fasit.)

La $f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{for} |t| \leq 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$

Løsning: Forslag 1 er å regne ut direkte. Forslag 2 er som følgende

Vi bruker konvolusjonsteoremet som sier at

$$\mathscr{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}\{f\}\mathscr{F}\{g\} \tag{2}$$

Vi bruker resultatet fra oppgave 7. Dvs at $f(t) = (g * g)(t)$ der g er lik funksjonen f i oppgave 7.

NTNU
Det skapende universitet

Vi har at

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-iwt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-iwt}dt \tag{3}$$

Regner vi ut integralet får vi

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w/2}{w} \tag{4}$$

NTNU
Det skapende universitet

Bruker vi konvolusjonsteoremet får vi

$$\mathscr{F}\{f\} = \mathscr{F}\{g * g\} = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}\{g\}\mathscr{F}\{g\} = \sqrt{2\pi}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin w/2}{w}\right)^2 \tag{5}$$

Dvs

$$\mathscr{F}\{f\} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sin w/2}{w}\right)^2 \tag{6}$$

Svaralternativ A er nærmest dette svaret.

NTNU
Det skapende universitet