Numerisk integrasjon

Arne Morten Kvarving

Department of Mathematical Sciences
Norwegian University of Science and Technology

29. Oktober 2007

Problem og framgangsmåte

Vil vil finne en numerisk approksimasjon til

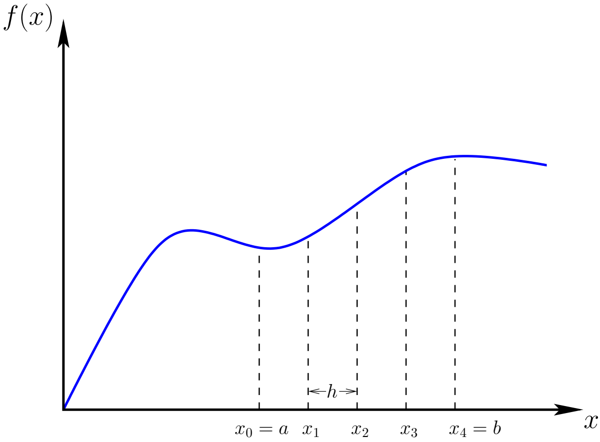
$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vi utfører dette som

$$J \approx \sum_{j=0}^{N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{N} J_j$$

hvor p_k er interpolasjonspolynomet av orden $k = 0, 1, 2$.

Geometrisk bilde



Vi bruker $k = 0$.

I hvert intervall bruker vi en konstant verdi for funksjonen. Dette gir

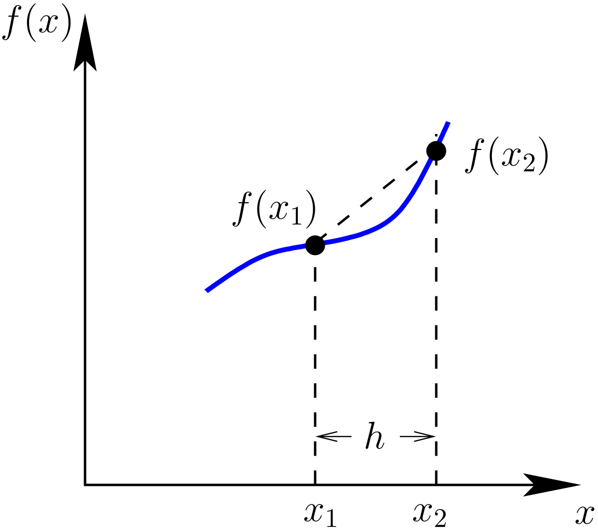
$$J_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t_j)\,\mathrm{d}x = hf(t_j)$$

$$J \approx h \sum_{j=0}^{N} f(t_j)$$

Best å velge t_j midt i intervallene, dvs

$$t_j = x_j + \frac{h}{2}$$

Vi bruker $k = 1$.



I hvert intervall bruker vi en rett linje.

Vi bruker $k = 1$.

Innfører $s = (x - x_j)/h$. Dette betyr at i et intervall har vi

$$p_1(s) = f_j + (f_{j+1} - f_j)\, s$$

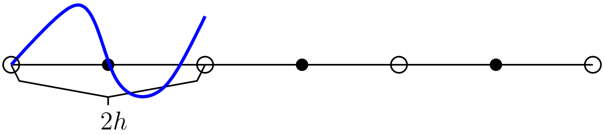
Tar integralet

$$J_j = h \int_0^1 p_1(s)\,\mathrm{d}s = h \left(f_j s + \frac{1}{2} (f_{j+1} - f_j)\, s^2 \Big|_{s=0}^{1} \right) = \frac{h}{2} (f_j + f_{j+1})$$

Summerer. To bidrag i alle punkt bortsett fra endepunkt;

$$J \approx \frac{h}{2} f_0 + h \sum_{j=1}^{N} f_j + \frac{h}{2} f_{N+1}$$

Vi bruker $k = 2$.



- Trenger et like antall intervall.
- Deler inn i segment på tre og tre noder.
- I hvert segment bruker vi et andregradspolynom.

Vi bruker $k = 2$.

I et intervall finner vi $p_2(x)$ ved hjelp av Lagransk interpolasjon

$$p_2(x) = \frac{(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})} f_j + \frac{(x - x_j)(x - x_{j+2})}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_j)} f_{j+1} + \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})} f_{j+2}$$

Innfører $s = (x - x_{j+1})/h$. Dette gir

$$p_2(s) = \frac{1}{2} s(s-1) f_j + (s+1)(s-1) f_{j+1} + \frac{1}{2}(s+1) s f_{j+2}$$

Vi bruker $k = 2$.

Integrere nå over intervallet $(s = -1 \cdots 1)$ og finner

$$J_j \approx \frac{h}{3} \left(f_j + 4 f_{j+1} + f_{j+2} \right)$$

- Får to bidrag for alle høyrenoder bortsett fra den siste

Summerer og får

$$J \approx \frac{h}{3} \left(f_0 + 4 f_1 + 2 f_2 + 4 f_3 + 2 f_4 + \cdots + 4 f_N + f_{N+1} \right)$$

Maksimal polynomorden

- Antar nå at $f(x)$ *ER* et polynom.
- Tillater vekter i integralpunktene, dvs

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=1}^{N} \omega_j f_j$$

  Legg merke til at vi alltid jobber på et normalisert intervall.
- Vi kan plassere nodene hvor vi vil inne i intervallet.
- Dette betyr at vi har $2N$ frihetsgrader - N vekter og N noder.
- Vi vet at med $2N$ parametere å velge fritt, kan vi interpolere et polynom av grad $2N-1$.

Maksimal polynomorden

- Dette betyr at vi kan integrere et polynom av grad 3 eksakt med kun 2 noder.
- Nodene x_j er røtter av Gauss-polynom, uten at vi tar detaljer her.
- For eksempel med $n = 2$:

$$\omega_1 = \omega_2 = 1$$
$$x_1 = -0.57, x_2 = 0.57$$

- Legg merke til at vi må være i stand til å evaluere funksjonen i ethvert punkt i intervallene hvis vi skal bruke disse metodene.

Oppsummert

Metode	Orden	Polynomgrad	Integreres eksakt	Feilestimat
Midtpunkt	1	0	1	
Trapes	2	1	1	$\frac{1}{3}\left(J_{h/2} - J_h\right)$
Simpsons	4	2	3	$\frac{1}{15}\left(J_{h/2} - J_h\right)$

Alle formler har ca samme arbeidsmengde $\Rightarrow$ bruk Simpsons.
Symmetri gir oss den ekstra nøyaktigheten.

Rombergmetoden

- Idé: Bruk liten h hvor variabiliteten er høy ($f^{(n)}$ er stor) og større h der den er mindre.
- Først hele intervallet. Bestemmer oss for en global feiltoleranse (mindre enn feilen med et intervall).
- Halverer intervallet, beregner feilen ved hjelp av feilestimering ved halvering.
- Hvis feilen er for stor, del igjen.
- Kalles for Rombergmetoden.
- Kan brukes med alle numeriske integrasjonsmetoder så lenge vi har et feilestimat.

Eksempel på bruk av Romberg

$$J = \int_0^2 \frac{1}{4}\pi x^4 \cos \frac{\pi x}{4} \,\mathrm{d}x = 1.25953$$

- Vi bruker $h = 1$.
- Vi bruker $Tol = 0.0002$.
- Vi bruker Simpsonsmetoden.
- Først hele intervallet:

$$J = 0.740480$$

Eksempel på bruk av Romberg

$$J = \int_0^2 \frac{1}{4}\pi x^4 \cos\frac{\pi x}{4}\,\mathrm{d}x = 1.25953$$

Intervall	Integral	Feil	Tol	Beslutning
$[0, 2]$	0.740480		0.0002	
$[0, 1]$	0.1222794			
$[1, 2]$	1.10695			
	Sum=1.122974	0.032617	0.0002	Del
$[0.0, 0.5]$	0.004782			
$[0.5, 1.0]$	0.118934			
	Sum=0.123716*	0.000061	0.0001	Ok
$[1.0, 1.5]$	0.528176			
$[1.5, 2.0]$	0.605821			
	Sum=1.13300	0.001803	0.0001	Del

Eksempel på bruk av Romberg

$$J = \int_0^2 \frac{1}{4}\pi x^4 \cos\frac{\pi x}{4}\,\mathrm{d}x = 1.25953$$

Intervall	Integral	Feil	Tol	Beslutning
$[1.00, 1.25]$	0.200544			
$[1.25, 1.50]$	0.328351			
	Sum=0.528895*	0.000048	0.00005	Ok
$[1.50, 1.75]$	0.388235			
$[1.75, 2.00]$	0.218457			
	Sum=0.606692	0.000058	0.00005	Del
$[1.500, 1.625]$	0.196244			
$[1.625, 1.750]$	0.192019			
	Sum=0.388263*	0.0000002	0.000025	Ok

Eksempel på bruk av Romberg

$$J = \int_0^2 \frac{1}{4}\pi x^4 \cos \frac{\pi x}{4}\,\mathrm{d}x = 1.25953$$

Intervall	Integral	Feil	Tol	Beslutning
$[1.750, 1.875]$	0.153405			
$[1.875, 2.000]$	0.328351			
	Sum=0.218483*	0.000002	0.000025	Ok

Så vi finner vår approksimasjon som

$$J \approx 0.123716 + 0.528895 + 0.388263 + 0.218483 = 1.25936$$