



LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN TMA4130 MATEMATIKK 4N, AUG. 2004

Oppgave 1

a)

$$\frac{2s}{(s^2 + 1)^2}, \quad \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}, \quad \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$$

b)

$$x(t) = C(\sin t - t \cos t)$$

Oppgave 2 MANGLER!

Oppgave 3 MANGLER

Oppgave 4

a) Vi får tabellen

x	$f(x)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1		
1	-1	-2	2/3
4	1	2/3	-1/3
6	-1	-1	-1/6

for datasett i), og for datasett ii) får vi tabellen

x	$f(x)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
4	1		
1	-1	2/3	-1/3
6	-1	0	1/3
0	1	-1/3	-1/6

b) Interpolasjonspolynomet kan skrives på formen

$$p = f(x_0) + f[x_1x_0](x - x_0) + f[x_2x_1x_0](x - x_0)(x - x_1) + \\ + f[x_3x_2x_1x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Ved bruk av tabellene fra a) finner vi

$$p_1(x) = 1 - 2x + \frac{2}{3}x(x - 1) - \frac{1}{6}x(x - 1)(x - 4) = \underline{\underline{1 - \frac{10}{3}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3}}$$

og

$$p_2(x) = 1 + \frac{2}{3}(x - 4) - \frac{1}{3}(x - 4)(x - 1) - \frac{1}{6}(x - 4)(x - 1)(x - 6) = \underline{\underline{1 - \frac{10}{3}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3}}$$

Vi ser at $p_1(x) = p_2(x)$. Dette er ellers opplagt siden begge tredjegradspolynomene går gjennom de samme 4 punktene.

Oppgave 5

a) Vi deler intervallet $[0, 1]$ i $N = 1/h$ deler med lengde h og betrakter den ukjente funksjonen i de diskrete punktene $x_m = mh$, $m = 0, \dots, N$. Det samme gjør vi med tidspunktene $t_n = nk$, $n = 0, 1, 3, \dots$. Forlengs Euler for problemet i oppgaven blir da

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{1}{\pi^2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + 2u_{i-1}^j}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq (N - 1), \quad j \geq 0; \\ u_0^j = u_N^j = 0, \quad j \geq 1.$$

b) Ved å bruke algoritmen i a) får vi ligningene som gir oss $x = u_6^1$, $y = u_5^2$ og $z = u_5^3$. Siden

$$u_5^0 = \cos(\pi(x_5 - 1/2)) = 1, \\ \frac{u_6^1 - u_6^0}{k} = \frac{1}{\pi^2} \frac{u_7^0 - 2u_6^0 + u_5^0}{h^2}$$

får vi med

$$u_7^0 = \cos(\pi(x_7 - 1/2)) = 0.8090, \\ u_6^0 = \cos(\pi(x_6 - 1/2)) = 0.9511,$$

at $x = \underline{\underline{u_6^1 = 0.9133}}$ (den numeriske løsningen må være symmetrisk om $x = 0.5$ siden problemet er det. Det betyr at vi uten videre kunne sagt $u_6^1 = u_4^1$). Videre får vi

$$\frac{u_5^2 - u_5^1}{k} = \frac{1}{\pi^2} \frac{u_6^1 - 2u_5^1 + u_4^1}{h^2}$$

som gir $y = \underline{\underline{u_5^2 = 0.9222}}$. Likningen

$$\frac{u_5^3 - u_5^2}{k} = \frac{1}{\pi^2} \frac{u_6^2 - 2u_5^2 + u_4^2}{h^2}$$

gir oss $z = \underline{\underline{u_5^3 = 0.8856}}$.

Oppgave 6 Gauss–Seidel-metoden blir

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{2} \\y_{n+1} &= \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{1}{4}z_n + \frac{3}{4} \\z_{n+1} &= \frac{1}{4}y_{n+1} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

La $x_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = 1$, $z_0 = \frac{3}{4}$. Dette gir

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad y_1 = \frac{9}{8}, \quad z_1 = \frac{25}{32}$$