



Faglig kontakt under eksamen:
Yura Lyubarskii: mobil 91647362
Anne Kværnø: mobil 92663824

Eksamen i TMA4130 Matematikk 4N

Bokmål
Mandag 20. desember 2010
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematiske formelsamling*

Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1 Finn polynomet av lavest mulig grad som interpolerer punktene i datasettet

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	3	0.5	-1	-1.5

Oppgave 2 Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 4y = \begin{cases} 2 \sin 2t, & \text{for } 0 \leq t < \pi, \\ 0, & \text{for } t > \pi, \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Hint: Du kan benytte at $\sin \omega t * \sin \omega t = \frac{1}{2\omega} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$,
(i betydningen $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$).

Oppgave 3 Finn den inverse Laplace transformen av funksjonen

$$F(s) = \ln \frac{s+1}{s+2}.$$

Hint: Du kan prøve å bruke regelen $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ if $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

Oppgave 4 La en 2π -periodisk funksjon f bli gitt ved $f(x) = e^{-x}$, $-\pi < x < \pi$.

- a) Skisser grafen til den 2π periodiske utvidelsen til f , og finn dens komplekse Fourierrekke.
- b) Finn summen av rekkene

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{og} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Oppgave 5 Løs integralligningen

$$f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Oppgave 6

- a) Gitt ligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

finn alle løsninger på formen $u(x, t) = X(x)T(t)$ som tilfredstiller randbetingelsene

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0.$$

- b) Finn den løsningen av problemet i punkt **a)** som i tillegg tilfredstiller startbetingelsen

$$u(x, 0) = (\cos x + 1)^2, \quad 0 < x < \pi.$$

Oppgave 7 Gitt et system av første ordens differensialligninger

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0.$$

Vi har sett på flere mulige måter å løse slike ligninger numerisk, i denne oppgaven velger vi «trapes-metoden», gitt ved

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})] \quad (*)$$

der h er skrittlengden og $x_{n+1} = x_n + h$. Vi antar at \mathbf{y}_n er kjent, og (*) brukes til finne en tilnærming til \mathbf{y}_{n+1} . Metoden er implisitt, siden funksjonen \mathbf{f} også beregnes i den ukjente løsningen \mathbf{y}_{n+1} . Vi ender altså med et ikke-lineært ligningssystem som må løses med hensyn på \mathbf{y}_{n+1} for hvert skritt.

La $y = y(x)$ være funksjonen som tilfredstiller den andre ordens differensialligningen

$$y'' = \sin y,$$

med startbetingelser $y(0) = \pi/2$, $y'(0) = 0$.

Skriv om ligningen til et system av første ordens differensialligninger. Hva blir startverdiene for dette systemet?

Sett $h = 0.1$ og sett opp det ikke-lineære ligningssystemet du får når du ønsker utføre det første skrittet med trapesmetoden for dette systemet.

Oppgave 8 Gjør en iterasjon med Newtons metode på ligningssystemet

$$\begin{aligned} 20x_1 - x_2 - 10\pi &= 0, \\ \sin x_1 - 20x_2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Bruk $x_1^{(0)} = \pi/2$ og $x_2^{(0)} = 0$ som startverdier for iterasjonene.

Oppgave 9 Gitt den partielle differensialligningen

$$\begin{aligned} u_t &= \kappa u_{xx} + x(1-x), & (t > 0, \quad 0 < x < 1), \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, & (t > 0), \\ u(x,0) &= \sin(\pi x), & (0 < x < 1). \end{aligned}$$

Bruk et gitter bestående av punktene $t_j = jk$ og $x_i = ih$, $h = 1/N$, og sett opp et eksplisitt differanseskjema for denne ligningen, det vil si, bruk en sentraldifferanse for å approksimere u_{xx} og en foroverdifferanse for å approksimere u_t .

La $\kappa = 0.1$. Sett $h = 0.25$ og $k = 0.2$, og finn tilnærmelser til $u(0.25, 0.2)$, $u(0.5, 0.2)$ og $u(0.75, 0.2)$.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_i, i = 0, 1, \dots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\leq n$:

$$p(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]$$

- Numerisk derivasjon:

$$f'(x) = \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] + \frac{1}{2} h f''(\xi)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi)$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$J^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}.$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Jacobi: } x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$\text{Gauss-Seidel: } x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\mathbf{k}_1 = h \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$$

$$\mathbf{k}_2 = h \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$$

Tabell over noen Laplace-transformer

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n ($n = 0, 1, 2, \dots$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$

Tabell over noen Fourier-transformer

$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(w) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$
$u(x) - u(x - a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin aw}{w} - i \frac{1 - \cos aw}{w} \right)$
$u(x) e^{-x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1 + w^2} - i \frac{w}{1 + w^2} \right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$
$e^{-a x }$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{w^2 + a^2}$