

Matematikk 4D — Høst 2022

Sammendrag

Markus Grasmair / Anne Kværnø

Institutt for matematiske fag,
NTNU,
Trondheim

Trondheim,
23. november 2022

- 1 Flervariabel analyse (4D)
- 2 Laplacetransformasjon
- 3 Fourieranalyse
- 4 Analytisk løsning av PDEer
- 5 Numerisk løsning av ligninger, interpolasjon og integrasjon
- 6 Numerisk løsning av differensialligninger

Spørreskjema

<https://nettskjema.no/a/295853>



Partiell deriverte

La f være en funksjon av to uavhengige variable, (x, y) .

Den partiellderiverte av $f(x, y)$ med hensyn på henholdsvis x og y er

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}\end{aligned}$$

Definisjonen er tilsvarende for funksjoner av flere variable.

Høyere ordens deriverte og kjerneregelen

- Høyere ordens deriverte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = f_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = f_{xy} = f_{yx},$$

Rekkefølgen spiller ingen rolle

- Kjerneregelen: La x og y være funksjoner av t , og z en funksjon av x og y . Da er

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Laplace transformasjon

Den Laplacetransformerte til en funksjon $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ er definert som

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

for alle s hvor integralet eksisterer.

Løsning av differensial- og integralligninger:

- Bruk Laplacetransformasjonen på hele ligningen og få en algebraisk ligning.
- Løs den algebraiske ligningen.
- Finn den inverse Laplacetransformerte til løsningen.

Viktige formler

- s-shift: For alle $a > 0$ er

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \mathcal{L}(F)(s - a).$$

- Vi har at

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0).$$

- t-shift: For alle $a > 0$ er

$$\mathcal{L}(f(t - a)u(t - a))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f)(s).$$

- Vi har at

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s),$$

hvor $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ er konvolusjonen av f og g .

- 1 Flervariabel analyse (4D)
- 2 Laplacetransformasjon
- 3 Fourieranalyse**
- 4 Analytisk løsning av PDEer
- 5 Numerisk løsning av ligninger, interpolasjon og integrasjon
- 6 Numerisk løsning av differensialligninger

Fourierrekker

Vi kan skrive en $2L$ -periodisk funksjon f som:

- Reell Fourierrekke

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

- Kompleks Fourierrekke

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}.$$

De n -te Fourierkoeffisientene beskriver andelen av svingninger av frekvens $\frac{n}{2L}$ i funksjonen.

Beregning av Fourierkoeffisientene

Gitt en funksjon $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ kan vi beregne

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

eller

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx.$$

Parsevals identitet

Vi har at

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx &= L \left(2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \\ &= 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.\end{aligned}$$

I tillegg er

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_N(x))^2 dx = L \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

hvor

$$f_N = a_0 + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Ikke-periodiske funksjoner

En funksjon $f: [0, L]$ kan skrives som:

- Fourier-cosinusrekke

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

med

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

- Fourier-sinusrekke

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

med

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Fouriertransformasjon

Den Fouriertransformerte av en funksjon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er definert som

$$\hat{f}(\omega) := \mathcal{F}(f)(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Vi har at

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{+i\omega x} d\omega.$$

Verdien $\hat{f}(\omega)$ beskriver andelen av svingninger av frekvens ω i funksjonen f .

Viktige formler

- For alle $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ og $a \in \mathbb{R}$ er

$$\mathcal{F}(f(x+a))(\omega) = e^{i\omega a} \mathcal{F}(f)(\omega).$$

- For alle $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ og $a > 0$ er

$$\mathcal{F}(f(ax))(\omega) = \frac{1}{a} \mathcal{F}(f)(\omega/a).$$

- Vi har

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}(f)(\omega), \quad \text{og} \quad \mathcal{F}(f'')(\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}(f)(\omega).$$

- Vi har

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega),$$

$$\mathcal{F}(f \cdot g)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g))(\omega),$$

hvor konvolusjonen av f og g er definert som

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y) dy.$$

Diskret Fouriertransformasjon (DFT)

Den diskrete Fouriertransformerte av en vektor $\vec{f} \in \mathbb{R}^N$ er vektoren $\vec{\hat{f}} \in \mathbb{C}^N$, gitt som

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i \frac{2\pi nk}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad \text{eller} \quad \vec{\hat{f}} = \mathcal{F}_N \vec{f}$$

med

$$\mathcal{F}_N := (\omega_N^{kn})_{k,n=0}^{N-1} \quad \text{hvor} \quad \omega_N := e^{-i \frac{2\pi}{N}}.$$

Vi har at

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k e^{i \frac{2\pi nk}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad \text{eller} \quad \hat{f} = \frac{1}{N} \overline{\mathcal{F}_N} \vec{\hat{f}}.$$

- 1 Flervariabel analyse (4D)
- 2 Laplacetransformasjon
- 3 Fourieranalyse
- 4 Analytisk løsning av PDEer**
- 5 Numerisk løsning av ligninger, interpolasjon og integrasjon
- 6 Numerisk løsning av differensialligninger

Separasjon av variabler

Vi vil løse en *homogen, lineær* PDE for en funksjon $u(x, t)$ for $a < x < b$ og $t > 0$ med initialbetingelser og homogene randbetingelser, f.eks.

$$u(a, t) = 0 \quad \text{og} \quad u(b, t) = 0.$$

- Skriv en løsning som $u(x, t) = F(x)G(t)$ og finn ordinære differensialligninger for F og G .
- Finn alle ikke-trivielle løsninger $u_k(x, t) = F_k(x)G_k(t)$ som tilfredstiller randbetingelsene.
- Skriv løsningen som uendelig summe $u(x, t) = \sum_k a_k u_k(x, t)$ og finn koeffisientene a_k slik at initialbetingelsene er oppfylte.
 - ▶ Ofte: Koeffisientene a_k kan finnes ved å beregne en Fourier-sinusrekke eller Fourier-cosinusrekke av initialbetingelsene.

D'Alemberts løsning av bølgeligningen

Løsningen av bølgeligningen

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

kan skrives som

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

for noen funksjoner $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Funksjonene φ er avhengige av initial- og randbetingelsene.

Fouriertransformasjon av PDEer

Vi vil løse en PDE for en funksjon $u(x, t)$ for $x \in \mathbb{R}$ og $t > 0$ med noen initialbetingelser.

- Bruk Fouriertransformasjonen ved hensyn av x -variablen på hele PDEen.
- For hver frekvens ω får vi en ODE som vi kan løse.
- Beregn den Fouriertransformerte til initialbetingelsene for å tilpasse koeffisientene i løsningen.
- Beregn den inverse Fouriertransformerte.

- 1 Flervariabel analyse (4D)
- 2 Laplacetransformasjon
- 3 Fourieranalyse
- 4 Analytisk løsning av PDEer
- 5 Numerisk løsning av ligninger, interpolasjon og integrasjon**
- 6 Numerisk løsning av differensialligninger

Fikspunktiterasjon

Anta at $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuerlig deriverbar funksjon og $[a, b] \subset \mathbb{R}$ en intervall slik at:

- $a \leq g(x) \leq b$ for alle $x \in [a, b]$.
- Det finnes $0 < L < 1$ slik at $|g'(x)| \leq L$ for alle $x \in [a, b]$.

Da har fikspunktligningen $x = g(x)$ en unik løsning $r \in [a, b]$. I tillegg konvergerer iterasjonen

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

for alle $x_0 \in [a, b]$ mot r og vi har

$$|x_k - r| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0|,$$

$$|x_k - r| \leq \frac{L}{1 - L} |x_k - x_{k-1}|.$$

Newton's metode

Vi vil løse ligningssystemet

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0},$$

hvor $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ er en to gange kontinuerlig deriverbar funksjon.

Hvis $\vec{r}$ er en løsning av ligningssystemet og *Jacobimatrisen* $\mathbf{J}(\vec{r})$ er inverterbar, så konvergerer Newton iterasjonen

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \mathbf{J}(\vec{x}_k)^{-1} \vec{f}(\vec{x}_k)$$

mot $\vec{r}$, så lenge initialiseringen $\vec{x}_0$ er nærme nok til $\vec{r}$.

I tillegg er konvergensen kvadratisk, dvs

$$\|\vec{x}_{k+1} - \vec{r}\| \leq M \|\vec{x}_k - \vec{r}\|^2.$$

Polynominterpolasjon

Gitt en glatt funksjon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og ulike punkt $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ vil vi finne et polynom p_n av grad $\leq n$ slik at

$$f(x_i) = p_n(x_i) \quad \text{for } i = 0, \dots, n.$$

- Det finnes presist et slikt polynom.
- Vi kan eksplisitt konstruere det f.eks. med å løse et ligningssystem.
- Approksimasjonsfeil kan være veldig stor for visse funksjoner (f.eks. Runge funksjon).

Splineinterpolasjon

En spline på intervallet $[a, b]$ med noder

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

er en funksjon $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ slik at:

- s er $k - 1$ -ganger kontinuerlig deriverbar.
- s er et polynom av grad $\leq k$ på hvert intervall $[x_{j-1}, x_j]$.

Tallet k er orden på splinen.

- Lineære splines ($k = 1$) er stykkevis lineære funksjoner.
- Kubiske splines ($k = 3$) er de mest brukte i praksis.
- For å finne en interpolasjonsspline må man løse et lineært ligningssystem.

Numerisk integrasjon

For å approksimere $\int_a^b f(x) dx$ velger vi en partisjon av $[a, b]$ og beregner

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{m-1} Q[f](X_j, X_{j+1}),$$

hvor $Q[f]$ er en enkel kvadratur definert som

$$Q[f](c, d) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

for nodepunkt x_i og vekter w_i .

Vektene w_i er valgt slik at hvert polynom av grad $\leq n$ blir integrert eksakt av kvadraturen Q , dvs

$$Q[x^k](c, d) = \int_c^d x^k dx \quad \text{for } k = 0, \dots, n.$$

Feilestimat

For den sammensatte Simpsonregelen

$$S_m[f](a, b) = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + f(x_{2m}) + 4 \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2j+1}) \right)$$

med $h = (b - a)/2m$ har vi feilestimatet

$$E_m(a, b) := \int_a^b f(x) dx - S_m[f](a, b) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi).$$

Hvis $b - a$ er lite nok kan vi estimere

$$E_2(a, b) \approx \frac{1}{15} (S_2(a, b) - S_1(a, b)) =: \mathcal{E}_2(a, b)$$

med det *numeriske feilestimatet* $\mathcal{E}_2(a, b)$.

- 1 Flervariabel analyse (4D)
- 2 Laplacetransformasjon
- 3 Fourieranalyse
- 4 Analytisk løsning av PDEer
- 5 Numerisk løsning av ligninger, interpolasjon og integrasjon
- 6 Numerisk løsning av differensialligninger

ODEer og reduksjon av orden

Et m -te ordens initialverdiproblem

$$u^{(m)} = f(t, u, u', \dots, u^{(m-1)}), \quad u(t_0) = u_0, \dots, u^{(m-1)}(t_0) = u_0^{(m-1)}$$

kan skrives som første ordens system av ODEer

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(t_0) &= u_0, \\ \vdots & & \vdots & \\ y_{m-1}' &= y_m, & y_{m-1}(t_0) &= u_0^{(m-2)}, \\ y_m' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m), & y_m(t_0) &= u_0^{(m-1)}, \end{aligned}$$

med $y_1 = u$, $y_2 = u'$, $\dots$, $y_m = u^{(m-1)}$.

Alle metodene vi har diskutert er formulert for første ordens systemer!

Runge–Kutta metoder

En Runge–Kutte metode med Butcher-tablået

c_1	a_{11}	$\dots$	a_{1s}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
c_s	a_{s1}	$\dots$	a_{ss}
	b_1	$\dots$	b_s

for løsningen av ODEen $\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y})$ er definert som

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &:= \vec{f}\left(t_n + c_1 h, \vec{y}_n + h \sum_{j=1}^s a_{1j} \vec{k}_j\right), \\ &\vdots \\ \vec{k}_s &:= \vec{f}\left(t_n + c_s h, \vec{y}_n + h \sum_{j=1}^s a_{sj} \vec{k}_j\right), \\ \vec{y}_{n+1} &:= \vec{y}_n + h \sum_{j=1}^s b_j \vec{k}_j.\end{aligned}$$

Ordensbetingelser

En metode har orden p , hvis

$$\|\vec{y}(t_{\text{end}}) - \vec{y}_N\| \leq Ch^p,$$

hvor N og h oppfyller $(t_{\text{end}} - t_0)/N = h$.

En RK-metode har orden p , hvis den oppfyller *stabilitetsbetingelsene* opp til orden p :

p	betingelser
1	$\sum_i b_i = 1$
2	$\sum_i b_i c_i = 1/2$
3	$\sum_i b_i c_i^2 = 1/3$ $\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = 1/6$

Stabilitet

Hvis vi bruker en RK-metode for å løse ODEen

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0,$$

hvor $\lambda \in \mathbb{C}$, kan vi skrive iterasjonen som

$$y_{n+1} = R(z)y_n \quad \text{med } z = h\lambda.$$

- Funksjonen $R(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ er *stabilitetsfunksjonen* til metoden.
- *Stabilitetsområdet* til metoden er

$$\mathcal{S} := \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}$$

- Metoden er *A-stabil*, hvis

$$\mathbb{C}^- \subset \mathcal{S}, \quad \text{hvor } \mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} : \Re z \leq 0\}.$$

- Eksplisitte RK-metoder er aldri *A-stabile*.

Mer om stabilitet

Anta at vi vil løse et initialverdiproblem

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0,$$

hvor

$$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

er en matrise og at alle egenverdier λ_k til A oppfyller $\Re \lambda_k \leq 0$.

- Den numeriske løsningen er stabil (dvs $\|\vec{y}_n\| \leq C$ for alle n), hvis og bare hvis $h\lambda_k \in \mathcal{S}$ for alle egenverdier λ_k av A .
- Hvis metoden er A -stabil, så er løsningen stabil uansett størrelsen av h .

Endelige differanser

- Forover differanser:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h).$$

- Bakover differanser:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h).$$

- Sentrale differanser:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$
$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

Mer generelle formler kan konstrueres med Taylorutvikling.

Avrundningsfeil

Hver numerisk beregning også inkluderer avrundingsfeil, f.eks.

$$\tilde{\Delta}f(x) = \frac{f(x+h) - f(x) + \mathcal{O}(\epsilon)}{h} = \Delta f(x) + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{h}\right)$$

med *maskinnøyaktighet* $\epsilon \approx 10^{-16}$.

Den totale feilen blir da

$$\tilde{\Delta}f(x) - f'(x) = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{h}\right) + \mathcal{O}(h).$$

Praktisk betyr det at vi har en nedre grensen $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$ av feilen uavhengig hvor lite vi velger h .

Numerisk løsning av to-punkt randverdiproblemer

Vi vil løse to-punkt randverdiproblemer på formen

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = r(x) \quad \text{for } a < x < b$$

med randbetingelser i $x = a$ og $x = b$.

Framgangsmåte:

- Velg en grid størrelse $h = (b - a)/N$ og definer $x_i = a + ih$.
- I hvert gridpunkt x_i erstatt de deriverte med endelige differanser.
- Ignorer feiltermen, approksimer $U_i \approx u(x_i)$, og legg til randbetingelser.
- Løs det lineære ligningssystemet du får.

Tidsavhengige PDEer

Vi vil beregne en numerisk approksimasjon til en tidsavhengig PDE definert for $a < x < b$ og $t > 0$.

- Velg en grid størrelse $h = (b - a)/M$ og definer $x_i = a + ih$.
- Velg en grid størrelse k og definer $t_n = nk$.
- I hvert gridpunkt (x_i, t_n) erstatt alle deriverte med endelige differanser.
- Ignorer feiltermen, approksimer $U_i^n \approx u(x_i, t_n)$, og legg til rand- og initialbetingelser.
- Beregn de numeriske approksimasjonene U_i^n framover i tid.
- Vi må regne med at metoden blir ustabil hvis gridstørrelsen h er for lite sammenlignet med k eller k^2 . Det kan være nødvendig å bruke en implisitt metode:
 - ▶ Implisitt Euler metode.
 - ▶ Crank-Nicolson metode (“gjennomsnitt av eksplisitt og implisitt Euler”).

Rand- og initialbetingelser

- Dirichlet randbetingelser $u(a, t) = g_a(t)$ brukes direkte:

$$U_0^{n+1} = g_a(t_{n+1}).$$

- I tilfellet av Neumann (eller Robin) randbetingelser $\partial_x u(a, t) = g_a(t)$ bruker vi diskretisering av PDEen sammen med ligningen

$$g_a(t_{n+1}) = \partial_x u(a, t_{n+1}) \approx \frac{U_1^{n+1} - U_{-1}^{n+1}}{2h}$$

for å beregne U_0^{n+1} .

- For en initialbetingelse $\partial_t u(0, x) = g(x)$ bruker vi PDEen sammen med

$$g(x_i) = \partial_t u(0, x) \approx \frac{U_i^1 - U_i^{-1}}{2k}$$

for å beregne U_i^1 .

Eksamen

- Mandag 12. desember, kl 9–13.
- Skriftlig eksamen (men eksamensoppgavene blir vist i Inspera; bring egen datamaskin til eksamenslokalet som kan kjøre “Safe Exam Browser”).
- Hjelpemidler:
 - ▶ Godkjent enkel kalkulator.
 - ▶ Et gult A4-ark med egne håndskrevne notater.
 - ▶ Formelark blir lagt ved til eksamen.
- Vi organiserer spørretimer i uken før eksamen.