Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68

EKSAMEN I SIF5017 MATEMATIKK 4D

Torsdag 7. august 2003
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Vedlegg: Formelark i numerikk

Sensurdato: 28. august

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

a) Vis at den Laplacetransformerte til funksjonen $f(t) = te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2$ er

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2}.$$

Finn den inverse Laplacetransformerte til funksjonen $G(s) = F(s)e^{-s}$.

b) Bruk Laplacetransformasjon til å løse initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + y = r(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

der $r(t)$ er funksjonen gitt ved $r(t) = 0$ for $t < 1$, $r(t) = t - 1$ for $t > 1$.

Oppgave 2

Vis at

$$\mathcal{L}\{tf''(t)\} = -2sF(s) - s^2F'(s) + f(0)$$

når $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ og $f(t)$ og $f'(t)$ er kontinuerlige og $f''(t)$ er stykkevis kontinuerlig.

La $y(t)$ være en løsning av differensialligningen

$$ty'' + 2y' + ty = 0$$

som oppfyller $y(0) = 1$, og la $Y(s)$ være den Laplacetransformerte av $y(t)$.

Vis at $Y'(s) = -1/(s^2 + 1)$ og finn $y(t)$.

(Merk at differensialligningen bare har én initialbetingelse, men det nok for å løse oppgaven.)

Oppgave 3

a) Funksjonen $f(x)$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{for } 0 < x < 1 \text{ og for } 2 < x < \pi. \end{cases}$$

Finn Fouriercosinusrekka til $f(x)$ på intervallet $0 < x < \pi$. Hva er summen av rekka når $x = 1$ og når $x = -\pi/2$?

b) Finn alle funksjoner $u(x,t) = F(x)G(t)$ slik at

(i) $$u_t = u_{xx} \quad \text{for } 0 \le x \le \pi,\ t > 0$$

(ii) $$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0 \quad \text{for } t > 0.$$

Bestem, på rekkeform, en funksjon $u(x,t)$ som oppfyller (i), (ii) og

(iii) $$u(x,0) = f(x) \quad \text{for } 0 < x < \pi$$

der $f(x)$ er funksjonen definert i **a)**.

Oppgave 4

Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vis at den Fouriertransformerte $(1/\sqrt{2\pi}\,) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx$ til $f(x)$ kan skrives på formen

$$\widehat{f}(w) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iw} - e^{iw}}{w}.$$

Finn også den Fouriertransformerte av konvolusjonen $f * f$. Bruk invers Fouriertransformasjon til å bestemme verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5w - 2\cos 3w + \cos w}{w^2}\, dw.$$

(Du kan bruke, uten begrunnelse, at $(f * f)(x)$ er en kontinuerlig funksjon.)

Oppgave 5

Gitt funksjonen

$$f(x,y) = x^2 \left(1 - e^{y^3}\right)^2.$$

La $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ betegne den retningsderiverte av f i (x_0, y_0) i retningen gitt ved en vektor $\mathbf{u}$.

Finn retninger $\mathbf{u}_+$, $\mathbf{u}_-$ og $\mathbf{u}_0$ slik at

$$D_{\mathbf{u}_+} f(1,1) \text{ er størst mulig}, \qquad D_{\mathbf{u}_-} f(1,1) \text{ er minst mulig}, \qquad D_{\mathbf{u}_0} f(1,1) = 0.$$

Finn også et punkt (x_0, y_0) slik at $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = 0$ i alle retninger $\mathbf{u}$.

Oppgave 6

For å approksimere integralet $I = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ kan man bruke trapesmetoden

$$T_n f = \frac{h}{2}\left[f(-1) + f(1)\right] + h \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} f(jh) \qquad (h = 1/n),$$

eller rektangelmetoden

$$R_n f = h \sum_{j=-n}^{n-1} f(jh + h/2). \qquad (h = 1/n).$$

(I begge tilfeller er altså $h = 1/n$ og antall delintervall følgelig $2n$.) Vis at

$$T_{2n} f = \tfrac{1}{2}(T_n f + R_n f).$$

Beregn $T_2 f$ når $f(t) = t \sin^2 t$. Hvor stor er feilen når $T_2 f$ brukes som tilnærming til integralet $\int_{-1}^{1} t \sin^2 t\,dt$?

Oppgave 7

La $y = y(x)$ være den funksjonen som tilfredsstiller den andreordens ordinære differensialligningen

$$y'' - (1 - y^2)y' + y = 0 \tag{1}$$

med tilhørende initialbetingelser $y(0) = 2, y'(0) = 0$.

a) Skriv om ligningen (1) til et system av to førsteordens ordinære differensialligninger. Hva blir initialbetingelsene for dette systemet?

b) Vi ønsker å løse initialverdiproblemet

$$Y' = F(x, Y), \qquad Y(x_0) = Y_0$$

numerisk. Y er her en kolonnevektor av løsningskomponenter. I forelesningene har vi blant annet studert Eulers metode for dette problemet. En annen metode, kjent som "Baklengs Euler", er definert ved at

$$Y_{n+1} = Y_n + hF(x_{n+1}, Y_{n+1}) \tag{2}$$

der h betegner skrittlengden, og vi har brukt $x_{n+1} = x_n + h$. Vi antar at vi kjenner den numeriske løsningen Y_n på skritt n, og metoden (2) brukes til å definere den numeriske løsningen Y_{n+1} på skritt $n+1$. Metoden (2) er *implisitt* idet den evaluerer høyresiden F i det *ukjente* punktet Y_{n+1}. Vi må derfor generelt løse et ikke-lineært ligningssystem for hvert skritt for å finne tilnærmelsene Y_n når $n > 0$.

La $y_{i,n}$ for $i = 1, 2$ betegne komponent i av den numeriske løsningen på skritt n. Bruk $h = 0.1$ og skriv opp det ikke-lineære ligningssystemet for Y_1 basert på "Baklengs Euler" for systemet du utledet i a). Bruk de kjente initialbetingelsene Y_0 der du kan.

Oppgave 7 fortsetter på side 4

c) Gjør én iterasjon med Newtons metode på det ikke-lineære ligningssystemet

$$10y_1 - y_2 - 20 = 0$$
$$y_1 + (9 + y_1^2)y_2 = 0.$$

Bruk $y_1 = 2$ og $y_2 = 0$ som startverdier.