

Opgavesettet har 11 punkter, 1ab, 2, 3ab, 4, 5, 6 og 7abc som teller likt ved bedømmelsen.

- 1** a) Fra tabellen i Rottmann har vi $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \Gamma(n+1)/(s-a)^{n+1} = n!/(s-a)^{n+1}$. Følgelig er $\mathcal{L}\{te^{-t}\} = 1/(s+1)^2$, $\mathcal{L}\{e^{-t}\} = 1/(s+1)$, $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$, $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ og

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2\} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} \\ &= \frac{s^2 + 2s^2(s+1) + (s+1)^2 - 2s(s+1)^2}{s^2(s+1)^2} = \frac{1}{s^2(s+1)^2}. \end{aligned}$$

Ved å bruke skiftteorem 2 får vi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-s}\} = f(t-1)u(t-1) \\ &= ((t-1)e^{-(t-1)} + 2e^{-(t-1)} + (t-1) - 2)u(t-1) \\ &= (e(t+1)e^{-t} + t - 3)u(t-1). \end{aligned}$$

- b) Vi har $r(t) = (t-1)u(t-1) = h(t-1)u(t-1)$ der $h(t) = t$. Ved skiftteorem 1 får vi da $\mathcal{L}\{r(t)\} = H(s)e^{-s} = (1/s^2)e^{-s}$, og den Laplacetransformerte av differensialligningen blir

$$[s^2Y - s + 1] + 2[sY - 1] + Y = \frac{1}{s^2}e^{-s}.$$

Vi løser denne ligningen mhp. Y og inverstransformerer ved å bruke informasjon fra a):

$$\begin{aligned} (s^2 + 2s + 1)Y &= s + 1 + \frac{1}{s^2}e^{-s} \quad \text{dvs.} \quad (s+1)^2Y = (s+1) + \frac{1}{s^2}e^{-s} \\ Y &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2(s+1)^2}e^{-s} = \frac{1}{s+1} + F(s)e^{-s} \\ y &= \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-t} + (e(t+1)e^{-t} + t - 3)u(t-1) \\ &= \begin{cases} e^{-t} & \text{for } 0 \leq t \leq 1 \\ (1 + e + et)e^{-t} + t - 3 & \text{for } t \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

- 2** Fra tabell har vi $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ og $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$. Det gir

$$\mathcal{L}\{tf''(t)\} = -\frac{d}{ds} [s^2F(s) - sf(0) - f'(0)] = -2sF(s) - s^2F'(s) + f(0).$$

Den Laplacetransformerte av den gitte differensialligningen blir da

$$[-2sY(s) - s^2Y'(s) + 1] + 2[sY(s) - 1] - Y'(s) = 0.$$

Ved forenkling følger

$$-(s^2 + 1)Y'(s) - 1 = 0 \quad \text{og dermed} \quad Y'(s) = -\frac{1}{s^2 + 1}.$$

Ved igjen å bruke regelen $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ får vi, siden $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2 + 1)\} = \sin t$,

$$\mathcal{L}\{ty(t)\} = -Y'(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{som gir} \quad ty(t) = \sin t, \quad y(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

3 a) For koefisientene i cosinusrekke får vi

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_1^2 dx = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_1^2 \cos nx dx = \frac{2 \sin nx}{\pi n} \Big|_1^2 = \frac{2 \sin 2n - \sin n}{\pi n}.$$

Følgelig har $f(x)$ cosinusrekke

$$\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n - \sin n}{n} \cos nx.$$

La $S(x)$ betegne summen av rekke for vilkårlig x . For $x = 1$ og $x = -\pi/2$ får vi

$$S(1) = \frac{f(1+0) + f(1-0)}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad S\left(-\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{jevn}}{=} S\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

b) Dersom $u(x, t) = F(x)G(t)$ oppfylder (i) og (ii), må vi ha

$$F'' - kF = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F'(\pi) = 0 \quad \text{og} \quad G' - kG = 0$$

for en konstant k . Fra Kreyszig 11.5 (adiabatiske randbetingelser) vet vi at ikketrivielle løsninger for $F(x)$ blir $F_n(x) = \cos nx$ for $k = -n^2$ der $n = 0, 1, 2, \dots$. For $G(t)$ får vi $G' + n^2G = 0$ som gir $G_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$ der A_n er en vilkårlig konstant. For $u(x, t) = F(x)G(t)$ får vi dermed

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = A_n e^{-n^2 t} \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Siden (i) er lineær og homogen, er summen $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$ også en løsning, og den oppfylder (ii). Vi setter følgelig $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \cos nx$, og bestemmer koefisientene A_n slik at betingelsen (iii) blir oppfylt:

Vi skal ha $f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx$ for $0 < x < \pi$. Fra punkt a) får vi $A_0 = 1/\pi$ og $A_n = (2/\pi)(\sin 2n - \sin n)/n$ for $n = 1, 2, \dots$ og følgelig

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n - \sin n}{n} e^{-n^2 t} \cos nx.$$

4 De Fouriertransformerte av f og $f * f$ er

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-e^{-iwx}}{iw} \right]_{-1}^1 = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iw} - e^{iw}}{w}$$

$$\mathcal{F}(f * f) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \hat{f}(w) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-iw} - e^{iw}}{w} \right)^2 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-2iw} - 2 + e^{2iw}}{w^2}.$$

Ved å bruke formelen for invers Fouriertransformert får vi, siden $(f * f)(x)$ er kontinuerlig,

$$(f * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{e^{2iw} - 2 + e^{-2iw}}{w^2} e^{iwx} dw.$$

Setter vi $x = 3$, får vi

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{5iw} - 2e^{3iw} + e^{iw}}{w^2} dw = (f * f)(3) = 0$$

siden $(f * f)(3) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)f(3-p) dp = \int_{-1}^1 f(3-p) dp = \int_2^4 f(t) dt = 0$. Det søkte integralet er, siden $e^{iaw} = \cos aw + i \sin aw$, realdelen av integralet på venstresiden. Følgelig er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5w - 2 \cos 3w + \cos w}{w^2} dw = 0$$

5 Vi regner først ut gradientvektoren til $f(x, y) = x^2(1 - e^{y^3})^2$:

$$(1) \quad \nabla f(x, y) = 2x(1 - e^{y^3})^2 \mathbf{i} - 6x^2 y^2 (1 - e^{y^3}) e^{y^3} \mathbf{j}$$

og følgelig

$$(2) \quad \nabla f(1, 1) = 2(1 - e)^2 \mathbf{i} - 6(1 - e)e \mathbf{j} = 2(e - 1) [(e - 1)\mathbf{i} + 3e\mathbf{j}].$$

Størst retningsderivert i $(1, 1)$ har $f(x, y)$ i retningen til gradientvektoren $\nabla f(1, 1)$. Vektoren \mathbf{u}_+ må derfor være parallell og ensrettet med $\nabla f(1, 1)$. Fra (2) ser vi at vi kan velge $\mathbf{u}_+ = (e - 1)\mathbf{i} + 3e\mathbf{j}$. Minst retningsderivert i $(1, 1)$ har $f(x, y)$ i den motsatte retningen, det gir $\mathbf{u}_- = -(e - 1)\mathbf{i} - 3e\mathbf{j}$.

Den retningsderiverte $D_{\mathbf{u}_0} f(1, 1) = 0$ dersom $\nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{u}_0 = 0$. Da må $\mathbf{u}_0 = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ oppfylle $(e - 1)a + 3eb = 0$. De to retningene der $D_{\mathbf{u}_0} f(1, 1) = 0$ er da gitt ved vektorene $\mathbf{u}_0 = \pm [3e\mathbf{i} - (e - 1)\mathbf{j}]$.

Den retningsderiverte $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}/|\mathbf{u}| = 0$ i alle retninger \mathbf{u} dersom $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$. Fra (1) ser vi at vi må ha $x_0(1 - e^{y_0^3}) = 0$ og $x_0 y_0 (1 - e^{y_0^3}) = 0$. Det er oppfylt for punktene (x_0, y_0) der $x_0 = 0$ eller $y_0 = 0$.

6 I $T_{2n}f$ lar vi annethvert ledd gå til $T_n f$ og $R_n f$ henholdsvis:

$$\begin{aligned} T_{2n}f &= \frac{1/2n}{2} [f(-1) + f(1)] + \frac{1}{2n} \sum_{j=-(2n-1)}^{2n-1} f\left(\frac{j}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1/n}{2} [f(-1) + f(1)] + \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=-(2n-2) \\ j \text{ partall}}}^{2n-2} f\left(\frac{j}{2n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=-(2n-1) \\ j \text{ odde}}}^{2n-1} f\left(\frac{j}{2n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1/n}{2} [f(-1) + f(1)] + \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=-n}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + \frac{1/n}{2}\right) \right\} = \frac{1}{2} [T_n f + R_n f] \end{aligned}$$

der vi innførte $j = 2k$ for partall j og $j = 2k + 1$ for oddetall j .

Når $n = 2$ er

$$T_2 f = \frac{1}{4} [f(-1) + f(1)] + \frac{1}{2} [f(-\frac{1}{2}) + f(0) + f(\frac{1}{2})].$$

Siden $f(t) = t \sin^2 t$ er en odde funksjon, er $\int_{-1}^1 f(t) dt = 0$. Vi har også $f(-1) + f(1) = 0$, $f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) = 0$ og $f(0) = 0$ slik at $T_2 f = 0$. Trapesmetoden gir altså eksakt svar i dette tilfellet.

7 a) Vi innfører nye variabler $y_1 = y$ og $y_2 = y'$ og får differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 & \text{med initialbetingelser} & \quad y_1(0) = 2 \\ y_2' &= (1 - y_1^2)y_2 - y_1 & & \quad y_2(0) = 0. \end{aligned}$$

b) For differensialligningssystemet i a) blir "Baklengs Euler" gitt ved

$$\begin{pmatrix} y_{1,n+1} \\ y_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y_{2,n+1} \\ (1 - y_{1,n+1}^2)y_{2,n+1} - y_{1,n+1} \end{pmatrix}.$$

Med $n = 0$, $h = 0.1$ og initialbetingelsene $y_{1,0} = 2$ og $y_{2,0} = 0$ får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned}y_{1,1} &= 2 + 0.1y_{2,1} \\ y_{2,1} &= 0.1 [(1 - y_{1,1}^2)y_{2,1} - y_{1,1}].\end{aligned}$$

Multipliserer vi begge ligningene med 10, kan ligningssystemet skrives

$$\begin{aligned}10y_{1,1} - y_{2,1} - 20 &= 0 \\ y_{1,1} + (9 + y_{1,1}^2)y_{2,1} &= 0.\end{aligned}$$

c) Ligningssystemet

$$\begin{aligned}10y_1 - y_2 - 20 &= 0 \\ y_1 + (9 + y_1^2)y_2 &= 0\end{aligned} \quad \text{har Jacobimatrise} \quad J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 1 + 2y_1y_2 & 9 + y_1^2 \end{pmatrix}.$$

For å finne $y_{1,1} = y_{1,0} + \Delta y_{1,0}$ og $y_{2,1} = y_{2,0} + \Delta y_{2,0}$, løser vi ligningen

$$J(y_{1,0}, y_{2,0}) \begin{pmatrix} \Delta y_{1,0} \\ \Delta y_{2,0} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 10y_{1,0} - y_{2,0} - 20 \\ y_{1,0} + (9 + y_{1,0}^2)y_{2,0} \end{pmatrix}$$

med hensyn på $(\Delta y_{1,0} \quad \Delta y_{2,0})^\top$. Med startverdiene $y_{1,0} = 2$ og $y_{2,0} = 0$ får vi

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_{1,0} \\ \Delta y_{2,0} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

som gir

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{1,0} \\ \Delta y_{2,0} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = - \frac{1}{131} \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.15 \end{pmatrix}.$$

Følgelig får vi

$$y_{1,1} = 1.98 \quad \text{og} \quad y_{2,1} = -0.15.$$