



1. september 2003

EKSAMENSOPPGAVER  
MATEMATIKKDELEN AV TMA4135 MATEMATIKK 4D H-03

**Oppgave D-1**

a) La  $f(x)$  være definert for  $0 \leq x \leq \pi$  ved

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{når } 0 \leq x < \pi/2, \\ -1 & \text{når } \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Finn Fourier-cosinusrekken til  $f(x)$  i intervallet  $0 \leq x \leq \pi$ .

b) Gitt den partielle differenssialligningen

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0,$$

med randbetingelser

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Finn alle løsninger av (1) og (2) som er av formen  $u(x, t) = F(x)G(t)$ .

c) Angi en løsning av (1) og (2) som oppfyller initialbetingelsen

$$(3) \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

der  $f(x)$  er funksjonen definert i a).

Bestem til slutt en løsning av (1) og (2) som istedenfor (3) oppfyller initialbetingelsen

$$u(x, 0) = \sin^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

**Oppgave D-2**

Bruk Laplacetransformasjonen til å løse initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

der  $\delta$  betegner deltafunksjonen.

**Oppgave D-3**

Bruk tabell til å vise at funksjonen  $xe^{-ax^2}$  ( $a > 0$ ) har Fouriertransformert:

$$(1) \quad \mathcal{F}(xe^{-ax^2}) = -\frac{iw}{(2a)^{3/2}} e^{-w^2/4a}.$$

Bruk så (1) og tabell til å bestemme funksjonen  $f$  når

$$xe^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-2(x-v)^2} dv.$$

**Oppgave D-4**

a) Finn  $f(t)$  og  $g(t)$  når deres Laplacetransformerte er

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = \frac{1}{s} e^{-s}, \quad \mathcal{L}(g) = G(s) = \frac{1}{s^2} (1 - e^{-s}).$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + y = g(t) - \delta(t - 1), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

der  $g$  er definert i a) og  $\delta$  betegner deltafunksjonen.

c) Bestem  $x(t)$  av integralligningen

$$\int_0^t [x(u) - f(u)]x(t-u) du = g(t)$$

der  $f$  og  $g$  er funksjonene definert i a).

**Oppgave D-5**

a) La  $f(x)$  være definert for  $0 \leq x \leq \pi$  ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } 0 \leq x < \pi/2, \\ \pi - x & \text{når } \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Finn Fourier-sinusrekken til  $f(x)$  i intervallet  $0 \leq x \leq \pi$ .

b) Angi summen av sinusrekken i a) for  $x = \pi/2$  og for  $x = -3\pi/4$ .

Finn summen av rekken

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

**Oppgave D-6**

La  $g$  være en to ganger deriverbar funksjon, sett

$$f(x) = g''(x)$$

og anta at  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$  og at  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$  slik at de Fouriertransformerte av  $f(x)$  og  $g(x)$  eksisterer. Vi søker en løsning av den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0$$

slik at

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0$$

og

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x).$$

a) Overfør problemet ved hjelp av Fouriertransformasjonen til en ordinær differensialligning og løs denne.

b) Vis at løsningen på problemet kan skrives på formen

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-p)h(p, y) dp \quad \text{for } y > 0$$

og finn funksjonen  $h(p, y)$ .

**Oppgave D-7**

Løs følgende ligning ved hjelp av Laplacetransformasjonen:

$$y'(t) + \int_0^t e^u y(t-u) du - y(t) = 5e^t - 4t,$$

hvor  $y(0) = 1$  og  $t \geq 0$ .

**Oppgave D-8**

a) Finn de løsninger av den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

som kan skrives på formen

$$u(x, t) = F(x)G(t),$$

og som tilfredsstillter randkravene

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{for } t > 0.$$

b) Finn en løsning fra a) som også tilfredsstillter kravet

$$u(x, 1) = \sin x - 3 \sin 3x.$$

**Oppgave D-9**

Gitt den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

hvor  $-\infty < x < +\infty$  og  $t > 0$  og randbetingelsene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \quad \text{for } k = 1, 2, 3$$

og

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(x, t)| < \infty.$$

a) Benytt Fouriertransformasjonen til å overføre den gitte ligning til en ordinær differensialligning og løs denne. Forklar bruken av randbetingelsene.

b) Finn en løsning  $u(x, t)$  som tilfredsstillter kravet  $u(x, 0) = f(x)$ , hvor  $f(x)$  er en passende funksjon. Uttrykk løsningen så enkelt som mulig ved et konvolusjonsintegral

c) Regn ut Fouriertransformasjonene til  $e^{-|x|}$  og  $(2-x^2)e^{-x^2/2}$ .

d) Vis at

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u|} e^{-(x-u)^2/2} du$$

er en løsning av den inhomogene ligningen

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2(2-x^2)e^{-x^2/2}.$$

**Oppgave D-10**

Løs initialverdioproblemet

$$f'(t) = e^{2t} \sin t + \int_0^t e^{2u} (\cos u + 2 \sin u) f(t-u) du, \quad t \geq 0$$

$$f(0) = 0$$

ved hjelp av Laplacetransformasjonen.

**Oppgave D-11**

Beregn Fourierintegralet for funksjonen

$$f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|} \quad \text{for } -\infty < x < \infty$$

og begrunn at det eksisterer og konvergerer mot  $f(x)$  for alle  $x$ .

Bruk resultatet til å vise at

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Det oppgis at Fourierintegralet til en funksjon  $f(x)$  kan skrives som

$$\int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw$$

der

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv.$$

### Oppgave D-12

a) Finn alle funksjoner av typen

$$u(x, t) = F(x)G(t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq 1$$

som tilfredsstill den partielle differensialligningen

$$(*) \quad u_{xx} - 4u_x + u = u_t, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq 1$$

og randbetingelsene

$$(**) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{for } 0 \leq t \leq 1.$$

b) Finn løsningen  $u(x, t)$  av (\*) og (\*\*) som også tilfredsstill initialbetingelsen

$$u(x, 0) = 2e^{2x} \sin x \cos x \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi.$$

c) Finn løsningen  $u(x, t)$  av (\*) og (\*\*) som også tilfredsstill initialbetingelsen

$$u(x, 0) = xe^{2x} \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi.$$

### Oppgave D-13

a) La  $r(t)$  være trappefunksjonen definert ved

$$r(t) = n + 1 \quad \text{for } n < t < n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tegn grafen til  $r(t)$  og uttrykk  $r(t)$  ved enhetsprangfunksjoner (unit step functions)  $u(t-n)$ . Finn den Laplacetransformerte  $R(s) = \mathcal{L}(r)$  som en geometrisk rekke. For hvilke  $s$  konvergerer rekken, og hva blir summen?

b) Finn den inverse Laplacetransformerte  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} e^{-ns} \right\}$  for  $n = 0, 1, 2, \dots$

Benytt svaret til å finne løsningen av initialverdi problemet

$$x' + x = r(t), \quad x(0) = 1$$

som en uendelig rekke. (Funksjonen  $r(t)$  er definert i a.)

### Oppgave D-14

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = x(\pi - x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi.$$

Finn Fouriercosinusrekken til  $f(x)$  i det gitte intervallet.

b) Finn alle løsninger på formen  $u(x, y) = F(x)G(y)$  av randverdi problemet

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{for } 0 \leq x \leq \pi, y \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 & \text{for } y > 0. \end{cases}$$

c) Finn en (formell) løsning av (\*) på formen  $u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)G_n(y)$  som oppfyller

$$u(x, 0) = x(\pi - x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi.$$

Finn også en løsning av (\*) som oppfyller

$$u(x, 0) = 2 \cos x \cos 3x \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi.$$

### Oppgave D-15

a) La  $a$  være en positiv konstant. Finn den inverse Fouriertransformerte til

$$e^{-a|w|}.$$

b) Gitt den todimensjonale Laplacialigningen

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{for } -\infty < x < \infty, y \geq 0$$

med tilleggsbetingelser

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0$$

La  $\hat{u}(w, y)$  være den Fouriertransformerte av  $u(x, y)$  med hensyn på  $x$ . Bruk Fourierformasjonen til å finne en ordinær differensialligning for  $\hat{u}(w, y)$  og løs denne.

c) Anta at  $u(x, y)$  i tillegg til (1) og (2) også oppfyller

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0 \quad \text{og} \quad u(x, 0) = f(x),$$

der  $f$  er en gitt funksjon som kan Fouriertransformeres.

Vis at  $u(x, y)$  kan skrives på formen

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{(x-t)^2 + y^2} \quad \text{for } y > 0.$$

### Oppgave D-16

a) Bestem

$$\mathcal{L}(t \sin t), \quad \mathcal{L}(t \cos t) \quad \text{og} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(1+s^2)^2} \right\}$$

ved å bruke formler for Laplacetransformasjonen i formelsamlingen.

b) Finn ved hjelp av Laplacetransformasjonen de løsninger av differensialligningen

$$tx'' - 2x' + tx = 0$$

som tilfredsstiller  $x(0) = 0$ .

### Oppgave D-17

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{for } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{for } 0 \leq x < \pi; \end{cases}$$

som antas å være periodisk med periode  $2\pi$ . Finn Fourier-rekken til  $f(x)$ .

b) Funksjonen  $g(x)$  er også periodisk med periode  $2\pi$  og

$$g(x) = \begin{cases} -\pi e^x & \text{for } -\pi < x < 0, \\ \pi e^{-x} & \text{for } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Det oppgis at  $g(x)$  har Fourier-rekke

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1} (1 - (-1)^n e^{-\pi}) \sin nx.$$

Hva er summen av rekken (\*) for  $x = \pi/2$  og for  $x = 3\pi/2$ ?

Finn også summen av rekken

$$\frac{1}{1^2 + 1} - \frac{3}{3^2 + 1} + \frac{5}{5^2 + 1} - \frac{7}{7^2 + 1} + \dots$$

### Oppgave D-18

Gitt den partielle differensialligningen

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} + 6u + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

a) Finn de løsninger på formen

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$

som tilfredsstiller kravene

$$(*) \quad u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \text{for } y > 0.$$

b) Finn en løsning av (1) som i tillegg til (\*) oppfyller

$$u(x, 1) = e^{-2x} \sin^3 x.$$

(Oppgitt formel:  $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ .)

### Oppgave D-19

Det oppgis at Fourierintegralet til en funksjon  $f(x)$  kan skrives som

$$\int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw$$

der

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx \quad \text{og} \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx dx.$$

Bestem funksjonene  $A(w)$  og  $B(w)$  for funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ e^{-x} & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

Bruk resultatet til å finne verdien av integralene

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos w}{1+w^2} dw \quad \text{og} \quad \int_0^{\infty} \frac{w \sin w}{1+w^2} dw.$$

### Oppgave D-20

La  $f(x)$  være en odde funksjon som oppfyller

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{for } x > 1. \end{cases}$$

a) Finn den Fouriertransformerte av  $f(x)$ .

b) Bruk den inverse Fouriertransformasjonen til å beregne integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos t) \sin t}{t} dt.$$

### Oppgave D-21

Gitt den partielle differensialligningen

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} + 3u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0.$$

a) Finn alle løsninger av (\*) som kan skrives på formen  $u(x, t) = F(x)G(t)$  og som oppfyller randbetingelsene

$$(i) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

b) Finn en løsning av (\*) som i tillegg til (i) også oppfyller initialbetingelsene

$$(ii) \quad u(x, 0) = e^{-2x}(\sin x - 2 \sin 3x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

### Oppgave D-22

La  $u(x, y)$  være en løsning av

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + u, \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0,$$

som oppfyller  $u(x, 0) = f(x)$  for alle  $x$ . Anta at  $u(x, y)$  kan Fouriertransformeres med hensyn på  $x$ , og at

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Vis at  $u(x, y)$  kan skrives på formen

$$u(x, y) = \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2t\sqrt{y}) h(t) dt$$

og finn funksjonen  $h(t)$ .

### Oppgave D-23

La  $0 < a < \pi$  og la  $f(x)$  være en like funksjon med periode  $2\pi$  som oppfyller

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{hvis } a < x \leq \pi. \end{cases}$$

a) Vis at Fourierrekken til  $f(x)$  er

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \cos nx.$$

b) Finn summen av rekkene

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}, \quad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2na}{2n}.$$

### Oppgave D-24

Finn  $f(x)$  av ligningen

$$e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2(x-u)^2} du.$$

### Oppgave D-25

Gitt den partielle differensialligningen

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0.$$

a) Finn alle løsninger av (\*) som kan skrives på formen  $u(x, t) = F(x)G(t)$  og som oppfyller betingelsene

$$(i) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

b) Finn en løsning av (\*) som i tillegg til (i) også oppfyller betingelsen

$$(ii) \quad u(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

### Oppgave D-26

Gitt et system av ordinære differensialligninger

$$\begin{aligned} y_1'' + 2y_1 - y_2 &= f(t) \\ y_2'' + 2y_2 - y_1 &= -f(t) \end{aligned}$$

der

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{hvis } t > 1 \end{cases}$$

og  $y_i(0) = y_i'(0) = 0$  for  $i = 1, 2$ .

a) Vis at

$$Y_1(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s^2 + 3)}$$

der  $Y_1(s) = \mathcal{L}[y_1(t)]$ .

b) Finn  $y_1(t)$  og  $y_2(t)$ .

### Oppgave D-27

a) La  $f(x)$  være funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{for } -2 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn den Fouriertransformerte av  $f(x)$ .

b) Bruk resultatet fra a) til å beregne

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 w}{w^2} dw.$$

### Oppgave D-28

Gitt den partielle differensialligningen

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

der  $0 \leq x \leq \pi$  og  $t \geq 0$ .

a) Finn alle løsninger av (\*) på formen  $u(x, t) = F(x)G(t)$  som oppfyller

$$(i) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{for alle } t \geq 0.$$

b) Finn den løsningen av (\*) som i tillegg til (i) også er slik at Fourierrekken til  $u(x, 0)e^{-x}$  er gitt ved

$$(ii) \quad u(x, 0)e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)x$$

for  $0 \leq x \leq \pi$ .

### Oppgave D-29

a) Finn Fourierrekken til den funksjonen med periode  $2\pi$  som er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{for } -\pi < x \leq 0, \\ 0 & \text{for } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

b) Bruk resultatet fra a) til å finne summen av rekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

c) La  $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$  være Fourierrekken fra a). Skisser den kontinuerlige sjonen som har

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

som sin Fourierrekke. Det er nok å skissere funksjonen for  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ .

### Oppgave D-30

Gitt den partielle differensialligningen

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

der  $c$  er en positiv konstant.

a) Finn alle løsninger av (1) på formen

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

som tilfredsstillter randkravene

$$(2) \quad u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \text{for } t > 0$$

der  $L$  er en positiv konstant.

b) Finn løsningen  $u$  av (1) og (2) som også tilfredsstillter initialbetingelsene

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2L}x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin \frac{3\pi}{2L}x, \quad x \in [0, L].$$

**Oppgave D-31**

La funksjonen  $g$  være definert ved

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq -\pi, \\ \pi + x & \text{for } -\pi < x \leq 0, \\ \pi - x & \text{for } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{for } x \geq \pi. \end{cases}$$

a) Finn den Fouriertransformerte,  $\hat{g}$ , til  $g$ .

b) Bruk resultatet til å beregne integralet

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos \pi w}{w^2} dw.$$

**Oppgave D-32**

La  $h$  være definert ved  $h(t) = t^2 + t$  for  $t \in (-\pi, \pi]$  og  $h(t + 2\pi) = h(t)$  for  $t \in \mathbf{R}$ .

a) Skisser funksjonen  $h$  for alle  $t \in \mathbf{R}$ .

b) Finn Fourierrekken til  $h$ .

c) Bestem summen av Fourierrekken for alle  $t \in \mathbf{R}$ .

d) Finn summen av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^2} \right).$$

**Oppgave D-33**

La funksjonen  $f_\alpha$  være definert ved

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha & \text{for } t \in [1, 1 + 1/\alpha], \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

der  $\alpha$  er positiv konstant.

a) Finn den Laplacetransformerte,  $\mathcal{L}(f_\alpha)$ , til  $f_\alpha$ .

b) Løs differensialligningen

$$(*) \begin{cases} y'' + y = f_\alpha, \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$

der  $f_\alpha$  er funksjonen ovenfor.

c) Løsningen  $y$  av differensialligningen (\*) vil avhenge av parameteren  $\alpha$ .

Finn  $\varphi(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} y(t)$ . Hvilken differensialligning vil  $\varphi$  tilfredsstille?

**Oppgave D-34**

a) Finn  $\mathcal{L}(te^{-t} \sin 2t)$ .

b) Finn  $\mathcal{L}\{(t+b)u(t-a)\}$  og  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{(s+b)^2}\right\}$  der  $a$  og  $b$  er positive konstanter.

c) Bruk Laplacetransformasjonen til å finne funksjonen  $y(t)$  når

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e^\tau y(t-\tau) d\tau + t$$

for alle  $t \geq 0$ .

**Oppgave D-35**

Løs den partielle differensialligningen

$$(*) \quad t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

der  $-\infty < x < \infty$  og  $t \geq 0$ , under betingelsene

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0$$

$$(ii) \quad u(x, 0) = f(x)$$

der  $f(x)$  er en funksjon som har en Fouriertransformert.

Vis at svaret kan skrives på formen

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-st)g(s) ds$$

der funksjonen  $g(s)$  skal bestemmes.

**Oppgave D-36**

Funksjonen  $f(x) = \pi - \frac{x}{2}$ ,  $0 < x < \pi$ , er gitt.

a) Finn sinusrekken til funksjonen  $f(x)$ .

b) La for alle  $x$ ,  $S(x)$  betegne summen av sinusrekken til  $f(x)$  i a).

Hva blir  $S\left(-\frac{\pi}{4}\right)$  og  $S\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ ?

Skisser grafen til  $S(x)$  i det lukkede intervallet  $[-2\pi, +2\pi]$ .

Gitt den partielle differensialligningen

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u + 4 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad t \geq 0$$

med randkrav

$$(**) \quad u(0, t) = 0 = u(\pi, t), \quad t \geq 0.$$

c) Finn alle løsningene av (\*) på formen

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

som også tilfredsstillers (\*\*), og bestem en løsning av (\*) som tilfredsstillers (\*\*) og initialbetingelsen

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \pi, \quad t \geq 0.$$

### Oppgave D-37

Bruk Laplacetransformasjonen til å finne  $f(t)$  når

$$f(t) = e^{-t} - 2 \int_0^t \cos(t-u)f(u) du$$

for alle  $t \geq 0$ .

### Oppgave D-38

a) Finn Fouriercosinusrekka til funksjonen  $f(x) = \cosh x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ .

$$(\text{Husk at } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ og } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.)$$

b) Bruk resultatet i a) til å vise at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{2 \sinh \pi}.$$

c) Hvor mange *ledd* må vi ta med i rekka i b) for å beregne summen med feil mindre enn 0,004?

d) Finn alle løsninger av

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t > 0,$$

på formen  $u(x, t) = F(x)G(t)$  som oppfyller

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, \quad t > 0.$$

e) Finn den løsningen av (\*) som i tillegg til (i) også oppfyller

$$(ii) \quad u(x, 1) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

der  $f(x)$  er som i a).

### Oppgave D-39

a) Finn  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 2)} \right\}$  og  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-3s}}{s(s^2 + 2)} \right\}$ .

b) Gitt et system av differensialligninger

$$\begin{aligned} x'' + x - y &= r(t) \\ y'' + y - x &= -r(t) \end{aligned}$$

der

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{når } 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{når } t > 3 \end{cases}$$

og  $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$ .

Finn  $x(t)$  og  $y(t)$ .

### Oppgave D-40

a) La  $f(x) = x(\pi - x)$  for  $0 \leq x \leq \pi$ . Hva blir Fourier-sinusrekken til  $f(x)$ ? Du kan bruke Fourier-sinusrekken til  $x^2$  for  $0 \leq x < \pi$  er

$$2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{2m-1} - \frac{4}{\pi^2(2m-1)^3} \right] \sin(2m-1)x - \frac{1}{2m} \sin 2mx \right\}.$$

b) Finn alle løsninger av Laplaces ligning

$$(1) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

på formen  $u(x, y) = F(x)G(y)$  som tilfredsstillers

$$(2) \quad u(x, 0) = u(0, y) = u(\pi, y) = 0.$$

c) Bestem en løsning av (1) og (2) som oppfyller

$$(3) \quad u(x, \pi) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

der  $f(x)$  er funksjonen definert i a).



**Oppgave D-41**

- a) Finn Fouriertransformasjonen til funksjonen

$$f(x) = e^{-|x|} \cos x.$$

- b) Bruk resultatet fra a) til å finne verdien av integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{w^2 + 2}{w^4 + 4} \cos w \, dw.$$

**Oppgave D-42**La  $f$  være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \pi/2), \\ 0, & x \in [\pi/2, \pi). \end{cases}$$

La  $g$  betegne den odde, periodiske utvidelsen av  $f$  med periode  $2\pi$ , og la  $h$  være den like, periodiske utvidelsen av  $f$  med periode  $2\pi$ .

- a) Skisser
- $g$
- og
- $h$
- på intervallet
- $(-3\pi, 3\pi]$
- . (Merk av enhetene på aksene.)

- b) Finn Fourierrekken til
- $h$
- .

La  $G$  og  $H$  betegne summen av Fourierrekken til henholdsvis  $g$  og  $h$ .

- c) Bestem
- $G$
- og
- $H$
- i punktene
- $x = -\pi/4$
- ,
- $x = 0$
- og
- $x = \pi/2$
- .

- d) Finn summen av rekkene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)^2 - 1} \quad \text{og} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2 - 1}.$$

- e) Finn alle løsninger
- $u$
- av randverdi-problemet

$$(*) \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u, & x \in [0, \pi] \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

på formen  $u(x, t) = F(x)G(t)$ .

- f) Bestem løsningen av (\*) som tilfredsstiller initialbetingelsene

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

der  $f$  er funksjonen gitt i begynnelsen av oppgaven.**Oppgave D-43**

- a) Finn Fouriertransformasjonen til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{for } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{for } |x| > 1. \end{cases}$$

- b) Bruk resultatet fra a) til å finne verdien av integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

(Hint:  $1 - \cos w = 2 \sin^2 w/2$ )**Oppgave D-44**La  $a$  være en positiv konstant. Funksjonene  $f_a$  og  $g_a$  er definert ved

$$f_a(t) = e^{at} \quad \text{for } t > 0 \quad \text{og} \quad g_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < a, \\ e^{at} & \text{for } a < t. \end{cases}$$

- a) Finn de Laplacetransformerte
- $\mathcal{L}\{f_a\}$
- og
- $\mathcal{L}\{g_a\}$
- , og beregn
- $(f_a * g_a)(t)$
- .

- b) Bruk Laplacetransformasjonen til å finne en løsning av integralligningen

$$y(t) - \int_0^t e^u y(t-u) du = \int_0^t g_2(u) e^{t-u} du$$

der  $g_2$  er funksjonen  $g_a$  for  $a = 2$ .**Oppgave D-45**

- a) Finn Fourier-sinusrekken til funksjonen
- $f(x) = 1$
- på intervallet
- $[0, \pi]$
- .

- b) Differensialligningen

$$(i) \quad u_{xx} + 2u_x + u = tu_t$$

er gitt for  $0 < x < \pi$ ,  $t \geq 1$ . Finn alle funksjoner av formen  $u(x, t) = F(x)G(t)$  tilfredsstiller (i) og randbetingelsen

$$(ii) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{for } t \geq 1.$$

- c) Finn en formell løsning av (i) og (ii) som tilfredsstiller initialbetingelsen

$$(iii) \quad u(x, 1) = e^{-x} \quad \text{for } 0 < x < \pi.$$

**Oppgave D-46**

a) Finn de Fouriertransformerte til funksjonene

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x > 0 \\ e^x & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

b) Bruk Fouriertransformasjonen til å vise at  $f * g = \frac{1}{2}(f + g)$ .

Beregn integralet  $\int_0^\infty \frac{\cos(aw)}{1+w^2} dw$  der  $a$  er et reelt tall.

**Oppgave D-47**

a) Finn  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\}$ ,  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}\right\}$  og  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^2 + \omega^2}\right\}$  når  $\omega > 0$ ,  $a \geq 0$ .

b) Løs initialverdiproblemet:

$$y'' + 4y = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$\text{der } r(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{når } t > 1 \end{cases}$$

c) Skisser grafen til  $y(t)$  når

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

**Oppgave D-48**

Funksjonen  $f(x) = \pi$ ,  $0 < x < 1$ , er gitt. Beregn koeffisientene i Fourier-sinusrekken til  $f(x)$  og skriv opp rekken. Skisser også grafen til rekkens sum i det lukkede intervallet  $[-2, 2]$ .

**Oppgave D-49**

Gitt en sirkulær skive med radius 1 og sentrum i origo. Temperaturen i et punkt på skiven med polarkoordinater  $(r, \theta)$  betegnes  $u(r, \theta)$ . Den kontinuerlige funksjonen  $u(r, \theta)$  er løsning av ligningen

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (0 < r < 1, \quad -\infty < \theta < \infty)$$

og oppfyller (selvsagt) betingelsen

$$(2) \quad u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta).$$

a) La  $p \geq 0$  og bestem alle løsninger av (1) på formen  $u(r, \theta) = r^p G(\theta)$ . Hvilke av disse løsningene tilfredsstiller (2)?

b) (Kan besvares uavhengig av pkt. a)) La  $f(\theta)$  være en funksjon med periode  $2\pi$  gitt ved

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\pi < \theta < 0 \\ 1 & \text{for } 0 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \text{for } \pi/2 < \theta < \pi. \end{cases}$$

Finn Fourierrekken til  $f(\theta)$ .

c) Temperaturen på randen av sirkelskiven,  $u(1, \theta)$ , er gitt ved

$$u(1, \theta) = f(\theta).$$

Finn på rekkeform et uttrykk for temperaturen i et vilkårlig punkt  $(r, \theta)$  på sirkelskiven.

**Oppgave D-50**

Bruk Fouriertransformasjonen til å finne  $f(x)$  når

$$e^{-ax^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-b(x-u)^2} du, \quad b > a > 0.$$

**Oppgave D-51**

a) Finn den inverse Laplacetransformerte til funksjonen

$$F(s) = e^{-as} \frac{1}{(s+b)^2}.$$

b) Bruk Laplacetransformasjonen til å finne en løsning av initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\dot{x} + x &= \delta(t-1) - \delta(t-2) \\ x(0) &= 2 \\ \dot{x}(0) &= 2. \end{aligned}$$

**Oppgave D-52**

a) Finn alle funksjoner av formen  $u(x, y) = F(x)G(y)$  i rektanglet  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  tilfredsstiller

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ u_x(0, y) = u_x(a, y) = u(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

b) Finn den funksjonen, som i tillegg til betingelsene under punkt a, tilfredsstiller

$$u(x, b) = \cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi x}{a}.$$

**Oppgave D-53**

- a) Finn Fourier-cosinusrekken til funksjonen  $f(x) = e^{-x}$  på intervallet  $[0, \pi]$ .
- b) Skisser summen av rekken i intervallet  $[-2\pi, 2\pi]$ .
- c) Evaluer rekken for  $x = 0$  og  $x = \pi$  og bruk dette til å beregne summen av rekkene

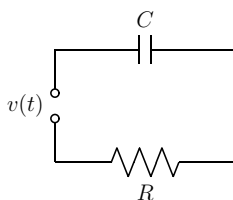
$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \quad \text{og} \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

**Oppgave D-54**

Strømmen  $i(t)$  tilfredsstiller ligningen

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v(t), \quad 0 \leq t < \infty,$$

der  $v(t) = 0$  når  $0 \leq t < 5$ ,  $v(t) = 17$  når  $5 \leq t < 10$ , og  $v(t) = 0$  når  $t \geq 10$ .



- a) Finn Laplacetransformasjonen

$$I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}.$$

- b) Bestem  $i(t)$ . Beregn  $i(2)$ ,  $i(7)$  og  $i(11)$ .

**Oppgave D-55**

Bestem på kompleks form Fourierrekken til  $f(x) = e^{-|x|}$  for  $-\pi < x \leq \pi$  der  $f(x)$  er periodisk med periode  $2\pi$ .

**Oppgave D-56**

- a) Løs integralligningen

$$y(t) = (t+1)e^t - 2e^t \int_0^t e^{-\tau} y(\tau) d\tau.$$

- b) Funksjonen  $f$  er definert ved

$$f(t) = \begin{cases} 8 \sin t & \text{for } 0 \leq t \leq \pi, \\ 0 & \text{for } t > \pi. \end{cases}$$

Løs differensialligningen

$$y'' + 9y = f(t)$$

med initialverdier  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

**Oppgave D-57**

Funksjonen  $u(x, y)$  er definert for  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $y \geq 0$ . Den tilfredsstiller differensialligningen

$$(1) \quad u_{xxy} - u = 0 \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi, y \geq 0$$

og randvilkårene

$$(2) \quad u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \text{for } y \geq 0.$$

- a) Finn først alle funksjoner  $u(x, y)$  på formen  $u(x, y) = F(x)G(y)$  som tilfredsstiller (1) og (2).

- b) Finn deretter en funksjon  $u(x, y)$  som tilfredsstiller (1), (2) og initialvilkåret

$$(3) \quad u(x, 0) = \sin x + \sin 2x \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi.$$

- c) Finn tilslutt en formell rekke  $u(x, y)$  som tilfredsstiller (1), (2) og initialvilkåret

$$(4) \quad u_y(x, 0) = 1 \quad \text{for } 0 < x < \pi.$$

**Oppgave D-58**

- a) Funksjonen  $f$  er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } a < x < b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

der  $a, b$  er konstanter,  $0 < a < b$ . Regn ut den Fouriertransformerte av  $f(x)$ .

Uttrykk dernest den inverse Fouriertransformasjonen ved  $f(x)$ .

- b) Bruk resultatet i a) til å finne verdien av integralene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-iwa}}{w} dw \quad \text{og} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin aw}{w} dw.$$

**Oppgave D-59**

Gitt følgende partielle differensialligning

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0$$

med randkravene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x(x, t) = 0$$

Vis at en løsning som oppfyller initialbetingelsen

$$u(x, 0) = 0$$

er gitt på formen

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2/4} g(s, t) \cos sx \, ds.$$

Funksjonen  $g(s, t)$  skal bestemmes.

( Husk at differensialligningen  $dy/dt + ay = b$ ,  $a$  og  $b$  konstanter,  $a \neq 0$ , har generell løsning  $y = Ce^{-at} + b/a$ .)

### Oppgave D-60

Løs følgende system av differensialligninger

$$\begin{aligned} y_1' + y_1 + y_2 &= \delta(t-1) \\ y_2' + 3y_1 - y_2 &= 0 \end{aligned}$$

med initialbetingelse  $y_1(0) = 0$  og  $y_2(0) = -1$ .

### Oppgave D-61

La funksjonen  $f$  være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} (\pi - a)x & \text{for } x \leq a \\ (\pi - x)a & \text{for } x > a \end{cases}$$

når  $x \in [0, \pi]$  og  $a$  er en gitt konstant i intervallet  $(0, \pi)$ .

- Bestem Fourier-sinusrekken til  $f$ . Hva er summen av Fourier-sinusrekken til  $f$  i  $x = a$ ?
- Sett  $a = 1$ . Hva er summen av Fourier-sinusrekken til  $f$  i  $x = 100$ ?
- Bruk Parsevals teorem (også kalt Parsevals identitet) til å bestemme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^4}.$$

### Oppgave D-62

- Bestem en løsning på formen  $v(x, t) = Ax + B$  av randverdiproblemet

$$(*) \begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v_x(0, t) = K_1 \\ v(\pi, t) = K_2 \end{cases}$$

der  $K_1$  og  $K_2$  er gitte reelle tall.

La  $u$  og  $v$  være vilkårlige løsninger av (\*). Vis at da vil  $w = u - v$  tilfredsstill

$$\begin{aligned} w_t &= w_{xx} \\ w_x(0, t) &= w(\pi, t) = 0. \end{aligned}$$

- Finn løsningen  $u(x, t)$  av

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \\ u_x(0, t) &= 1 \\ u(\pi, t) &= 3\pi \\ u(x, 0) &= x + 2\pi + \cos(x/2) - \cos(3x/2). \end{aligned}$$

### Oppgave D-63

- Funksjonen  $f(x)$  er definert for  $0 \leq x \leq \pi$  ved

$$f(x) = x^2 - \pi x.$$

Det oppgis at

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{n^3} (1 - \cos n\pi) \quad \text{for } n = 1, 2, \dots$$

Skriv opp Fourier-sinusrekken til  $f(x)$ .

- Funksjonen  $u(x, t)$  tilfredsstiller differensialligningen

$$(1) \quad u_t + tu - u_{xx} = 0$$

for  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $t \geq 0$ . Finn alle løsninger på formen  $u(x, t) = F(x)G(t)$  som også tilfredsstiller randvilkårene

$$(2) \quad u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0.$$

- Finn en løsning av (1) og (2) som tilfredsstiller initialvilkåret

$$(3) \quad u(x, 0) = f(x) - \frac{8}{\pi} \sin x \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi,$$

der  $f(x)$  er funksjonen definert i punkt a).

### Oppgave D-64

Gitt funksjonen  $f(x) = e^{-ax^2}$ ,  $a > 0$

- Regn ut den Fouriertransformerte av  $f$  konvolusjon med seg selv (dvs.  $\mathcal{F}(f * f)$ ).
- Bruk resultatet i a) til å finne verdien av

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-u)^2} \cdot e^{-au^2} \, du$$

for alle  $x \in \mathbf{R}$ .

**Oppgave D-65**

a) Bestem Fourier-sinusrekka til  $f(x) = x$  for  $x \in [0, \pi]$ .

b) Finn alle løsninger på form  $u(x, y) = F(x)G(y)$  av

$$(*) \begin{cases} u_{xx} - 2u_x + u_{yy} = 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \pi] \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad y \in [0, \pi] \end{cases}$$

c) Bestem løsningen av (\*) som oppfyller

$$u(x, \pi) = xe^x.$$

**Oppgave D-66**

La  $x = x(t)$  og  $y = y(t)$  løse

$$\begin{aligned} x'' - x + 5y' &= t \\ y'' - 4y - 2x' &= 2 \end{aligned}$$

med initialbetingelse  $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$ .

a) Vis at  $X = \mathcal{L}(x)$  og  $Y = \mathcal{L}(y)$  kan skrives på formen

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{s^2} + \frac{8}{3(s^2 + 4)} - \frac{5}{3(s^2 + 1)} \\ Y &= \frac{2s}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)}. \end{aligned}$$

b) Bestem løsningen  $x = x(t)$  og  $y = y(t)$ .

**Oppgave D-67**

Bruk Fouriertransform til å vise

$$\frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega = e^{-a|x|}$$

for alle  $x \in \mathbf{R}$  og  $a > 0$ .

**Oppgave D-68**

Vis ved bruk av kjernerregelen i 2 variable at variabelskiftet

$$u = x + 2y, \quad v = x$$

overfører ligningen

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x},$$

der den ukjente funksjonen  $z = f(x, y)$  skal ha kontinuerlige partiellderiverte, til ligningen

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

der den ukjente funksjonen er  $z = g(u, v) = g(x + 2y, x) = f(x, y)$ .

Hvilke funksjoner  $z = f(x, y)$  med kontinuerlige partiellderiverte er det som tilfredsstillers (1)?

**Oppgave D-69**

La funksjonen  $f$  være gitt ved

$$f(x, y, z) = z^3 - (x^2 + y)z + e^x + y^3 + 1.$$

Finn den retningsderiverte til  $f$  i punktet  $(0, -1, 1)$  i retningen gitt ved

$$2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Finn ligningen for tangentplanet til flaten  $f(x, y, z) = 3$  i punktet  $(0, -1, 1)$ .

**Oppgave D-70**

Du befinner deg i punktet  $P = (1, 1, 5)$  på en fjellside hvor høyden over havet er gitt ved

$$z = \frac{100}{10 + 3x^2 + 7y^2}.$$

Du beveger deg i retningen gitt ved  $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ . Hva er da vinkelen med horisontalplanet?

I hvilke retninger kan du gå fra P for å beholde samme høyde?

**Oppgave D-71**

La  $z = f(x, y)$  være en flate i rommet med tangentplan

$$x + z = 4$$

i punktet  $(3, 0, 1)$ . Finn den retningsderiverte til  $f(x, y)$  i punktet  $(3, 0)$  i retningen  $\mathbf{j}$ .

Bestem også en enhetsvektor  $\mathbf{u}$  slik at den retningsderiverte til  $f(x, y)$  i punktet  $(3, 0)$ , i retning  $\mathbf{u}$ , er lik  $1/2$ .

**Oppgave D-72**

Gitt funksjonen

$$f(x, y, z) = \sin(xy + z^2 - 4x + 4y).$$

Finn gradienten  $\nabla f(x, y, z)$ . Regn ut den retningsderiverte til  $f$  i origo i retning av vektoren  $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ . Hva er den største retningsderiverte til  $f$  i origo?

**Oppgave D-73**

En flate  $z = f(x, y)$  i rommet har tangentplan

$$z = 2x - 3y + 5$$

i punktet  $(1, 1, 4)$ . Finn den retningsderiverte til  $f$  i punktet  $(1, 1)$  i retningen  $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ .

La  $L$  være skjæringslinjen mellom tangentplanet i  $(1, 1, 4)$  og planet  $y = x$ . Finn vinkelen som  $L$  danner med  $xy$ -planet.

**Oppgave D-74**

Et fly reiser gjennom øvre luftlag der temperaturen i  $(x, y, z)$  er  $T(x, y, z)$ . Finn temperaturendringen per minutt rundt flyet ved et tidspunkt der

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -4 \quad \text{målt i } ^\circ\text{C/km,}$$

når flyets fart er 1000 km/h og det flyr i retningen  $\langle 7, 5, 1 \rangle$ .

**Oppgave D-75**

La  $f$  være funksjonen gitt ved  $f(x, y, z) = xyz$ , og la  $\mathbf{v}$  være en vektor som står vinkelrett både på  $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$  og  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ , og som har positiv  $\mathbf{k}$ -komponent. Finn den retningsderiverte av  $f$  i punktet  $P_0(1, -1, 2)$  i retningen til vektoren  $\mathbf{v}$ .

**Fasit**

$$\text{D-1 a) } \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos(2n+1)x$$

$$\text{b) } u_n(x, t) = A_n e^{-n^2 t} \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{c) } u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} e^{-(2n+1)^2 t} \cos(2n+1)x$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4t} \cos 2x$$

$$\text{D-2 } y(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t) - e^{\pi} e^{-t} \sin t \cdot u(t - \pi)$$

$$\text{D-3 } f(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x e^{-2x^2}$$

$$\text{D-4 a) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 1, \\ 1 & \text{for } t \geq 1, \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} t & \text{for } t < 1 \\ 1 & \text{for } t \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } y = \begin{cases} t - \sin t & \text{for } t < 1 \\ 1 - \sin t & \text{for } t \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{for } t < 1 \\ 0 & \text{for } t \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{D-5 a) } \frac{2 \sin x}{\pi} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{2 \sin 3x}{\pi} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{2 \sin 5x}{\pi} - \dots + \dots$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left[ \frac{2 \sin(2m-1)x}{\pi} - \frac{\sin 2mx}{2m} \right]$$

$$\text{b) } \pi/4, \quad -\pi/4, \quad \pi^2/8$$

$$\text{D-6 a) } \hat{u}(w, y) = \hat{g}(w) e^{-w^2 y}$$

$$\text{b) } h(p, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} e^{-p^2/4y}$$

$$\text{D-7 } y = e^t(\cos t + 3 \sin t) + 2t$$

$$\text{D-8 a) } u_n(x, t) = A_n t^{n^2} \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{b) } u(x, t) = t \sin x - 3t^9 \sin 3x$$

$$\text{D-9 a) } U(w, t) = B(w) e^{-(w^2+1)t}$$

$$\text{b) } u(x, t) = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-(x-u)^2/4t} du$$

$$\text{c) } \mathcal{F}(e^{-|x|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^2 + 1}$$

$$\mathcal{F}\left\{(2-x^2)e^{-x^2/2}\right\} = (w^2 + 1)e^{-w^2/2}$$

$$\text{D-10 } f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{2} t e^{2t}$$

$$\text{D-11 } f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^2} dw$$

**D-12 a)**  $u_n(x, t) = B_n e^{2x} \sin nx e^{-(n^2+3)t}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

**b)**  $u(x, t) = e^{2x} \sin 2x e^{-7t}$

**c)**  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} e^{2x} \sin nx e^{-(n^2+3)t}$

**D-13 a)**  $r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t-n)$ ,  $R(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s} e^{-ns} = \frac{1}{s(1-e^{-s})}$  for  $s > 0$

**b)**  $[1 - e^{-(t-n)}] u(t-n)$ ,  $x(t) = r(t) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(t-n)} u(t-n)$

**D-14 a)**  $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mx}{m^2}$

**b)**  $u_n(x, y) = C_n e^{-n^2 y^2 / 2} \cos nx$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

**c)**  $u(x, y) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mx}{m^2} e^{-2m^2 y^2}$

$u(x, y) = e^{-2y^2} \cos 2x + e^{-8y^2} \cos 4x$

**D-15 a)**  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{x^2 + a^2}$

**b)**  $\hat{u}(w, y) = A(w) e^{|w|y} + B(w) e^{-|w|y}$

**D-16 a)**  $\frac{2s}{(s^2+1)^2}$ ,  $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$ ,  $\frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$

**b)**  $x(t) = C(\sin t - t \cos t)$

**D-17 a)**  $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$

**b)**  $\pi e^{-\pi/2}$ ,  $-\pi e^{-\pi/2}$ ,  $\frac{\pi}{2} \frac{e^{-\pi/2}}{1+e^{-\pi}}$

**D-18 a)**  $u_n(x, y) = C_n e^{-2x} \sin nx \cdot e^{(2-n^2)/y}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

**b)**  $u(x, y) = \frac{3}{4} e^{-1-2x} \sin x \cdot e^{1/y} - \frac{1}{4} e^{7-2x} \sin 3x \cdot e^{-7/y}$

**D-19**  $A(w) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+w^2}$ ,  $B(w) = \frac{1}{\pi} \frac{w}{1+w^2}$ ,  $\int_0^{\infty} \frac{\cos w}{1+w^2} dw = \int_0^{\infty} \frac{w \sin w}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2e}$

**D-20 a)**  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos w - 1}{w} i$

**b)**  $\pi/2$

**D-21 a)**  $u_n(x, t) = [A_n \cos \sqrt{n^2+1}t + B_n \sin \sqrt{n^2+1}t] e^{-2x} \sin nx$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

**b)**  $u(x, t) = e^{-2x} [\cos \sqrt{2}t \cdot \sin x - 2 \cos \sqrt{10}t \cdot \sin 3x]$

**D-22**  $h(t) = e^{-t^2}$

**D-23 b)** i)  $\frac{\pi-a}{2}$ , ii)  $\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}$

**D-24**  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-2x^2}$

**D-25 a)**  $u_n(x, t) = C_n t^{n^2} \sin nx$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**b)**  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n^2}}{n^3} \sin nx$

**D-26 b)**  $y_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos \sqrt{3}t - u(t-1) [\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos \sqrt{3}(t-1)]$ ,  $y_2 = -y_1$

**D-27 a)**  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos 2w}{w^2}$

**b)**  $\pi/2$

**D-28 a)**  $u_n(x, t) = B_n e^{-(n^2+1)t} e^x \sin nx$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**b)**  $u(x, t) = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2+1)t} \sin(2n+1)x$

**D-29 a)**  $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right]$

**b)**  $\pi^2/8$ ,  $\pi/4$

**D-30 a)**  $u_n(x, t) = \left( A_n \cos \frac{(2n-1)\pi ct}{2L} + B_n \sin \frac{(2n-1)\pi ct}{2L} \right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**b)**  $u(x, t) = \cos \frac{\pi ct}{2L} \sin \frac{\pi x}{2L} + \frac{2L}{3\pi c} \sin \frac{3\pi ct}{2L} \sin \frac{3\pi x}{2L}$

**D-31 a)**  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \pi w}{w^2}$   
**b)**  $\pi^2/2$

**D-32 b)**  $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt + 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt \right]$

**c)**  $\begin{cases} h(t) & \text{for } t \neq (2n-1)\pi, n \text{ heltall} \\ \pi^2 & \text{for } t = (2n-1)\pi, n \text{ heltall} \end{cases}$   
**d)**  $\frac{2\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{6}$

**D-33 a)**  $\frac{\alpha e^{-s}}{\alpha} (1 - e^{-s/\alpha})$

**b)**  $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 1 \\ \alpha[1 - \cos(t-1)] & \text{for } 1 < t \leq 1 + 1/\alpha \\ \alpha[\cos(t-1 - 1/\alpha) - \cos(t-1)] & \text{for } t > 1 + 1/\alpha \end{cases}$

**c)**  $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 1, \\ \sin(t-1) & \text{for } t > 1; \end{cases} \quad y'' + y = \delta(t-1), \quad y(0) = y'(0) = 0$

**D-34 a)**  $\frac{4(s+1)}{[(s+1)^2 + 4]^2}$

**b)**  $e^{-as} \left( \frac{a+b}{s} + \frac{1}{s^2} \right), \quad (t-a)e^{-b(t-a)}u(t-a)$

**c)**  $y(t) = t - 1$

**D-35**  $g(s) = e^{-s^2/2}$

**D-36 a)**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - (-1)^n}{n} \sin nx$

**b)**  $-7\pi/8, \quad -5\pi/8$

**c)**  $u_n(x, t) = B_n e^{-[(n^2+1)/4]t} \sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - (-1)^n}{n} e^{-[(n^2+1)/4]t} \sin nx$

**D-37**  $f(t) = e^{-t}(t-1)^2$

**D-38 a)**  $\frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cos nx$

**c)** 14 (fra restleddsestimat for alternerende rekke)

**d)**  $u_n(x, t) = A_n t^{-n^2} \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

**e)**  $u(x, t) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} t^{-n^2} \cos nx$

**D-39 a)**  $\frac{1}{2}[1 - \cos \sqrt{2}t]; \quad \frac{1}{2}[1 - \cos \sqrt{2}(t-3)]u(t-3)$

**b)**  $x(t) = \frac{1}{2}[1 - \cos \sqrt{2}t] - \frac{1}{2}[1 - \cos \sqrt{2}(t-3)]u(t-3), \quad y(t) = -x(t)$

**D-40 a)**  $\frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{(2m-1)^3}$

**b)**  $u_n(x, y) = C \sin nx \sinh ny, \quad n = 1, 2, \dots$

**c)**  $u(x, y) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x \sinh(2m-1)y}{(2m-1)^3 \sinh(2m-1)\pi}$

**D-41 a)**  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w^2 + 2}{w^4 + 4}$

**b)**  $\frac{\pi \cos 1}{2e}$

**D-42 b)**  $\frac{1}{\pi} + \frac{\cos x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{4m^2 - 1} \cos 2mx$

**c)**  $G(-\pi/4) = -1/\sqrt{2}, \quad G(0) = 0, \quad G(\pi/2) = 0$

$H(-\pi/4) = 1/\sqrt{2}, \quad H(0) = 1, \quad H(\pi/2) = 0$

**d)**  $\frac{\pi-2}{4}; \quad \frac{1}{2}$

**e)**  $u_0(x, t) = A_0 e^t + B_0 e^{-t}$

$u_1(x, t) = (A_1 + B_1 t) \cos x$

$u_n(x, t) = (A_n \cos \sqrt{n^2-1}t + B_n \sin \sqrt{n^2-1}t) \cos nx, \quad n = 2, 3, 4, \dots$

**f)**  $u(x, t) = \frac{\cosh t}{\pi} + \frac{\cos x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{4m^2 - 1} \cos \sqrt{4m^2 - 1}t \cos 2mx$

**D-43 a)**  $\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos w}{w^2}$

**b)**  $\frac{\pi}{2}$



**D-44 a)**  $\frac{1}{s-a}, \quad e^{-a(s-a)} \frac{1}{s-a}; \quad e^{at}(t-a)u(t-a)$   
**b)**  $(f_2 * g_2)(t) = e^{2t}(t-2)u(t-2)$

**D-45 a)**  $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$   
**b)**  $u_n(x, t) = e^{-x} \sin nx \cdot t^{-n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$   
**c)**  $u(x, t) = \frac{4}{\pi} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)t^{(2n+1)^2}}$

**D-46 a)**  $\hat{f}(w) = \frac{1-iw}{\sqrt{2\pi}(1+w^2)}, \quad \hat{g}(w) = \frac{1+iw}{\sqrt{2\pi}(1+w^2)}$   
**b)**  $\frac{\pi}{2} e^{-|a|}$

**D-47 a)**  $\frac{1}{\omega} \sin \omega t; \quad \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t); \quad \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-a)u(t-a)$   
**b)**  $\frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4}[1 - \cos 2(t-1)]u(t-1)$

**D-48**  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{2m-1} \sin(2m-1)\pi x$

**D-49 a)**  $u(r, \theta) = A + B\theta \quad (p=0) \quad \text{og} \quad u(r, \theta) = r^p(A \cos p\theta + B \sin p\theta) \quad (p > 0)$   
 $u_0(r, \theta) = A_0 \quad \text{og} \quad u_n(r, \theta) = r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (n = 1, 2, \dots)$

**b)**  $a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_n = \frac{\sin(n\pi/2)}{\pi n} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}/\pi n & \text{for } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{for } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$

$$b_n = \frac{1 - \cos(n\pi/2)}{\pi n} = \begin{cases} 1/\pi n & \text{for } n = 1, 3, 5, \dots \\ 2/\pi n & \text{for } n = 2, 6, 10, \dots \\ 0 & \text{for } n = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

$$f(\theta) \sim \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (-1)^m \frac{\cos(2m+1)\theta}{2m+1} + \frac{\sin(2m+1)\theta}{2m+1} + \frac{\sin 2(2m+1)\theta}{2m+1} \right]$$

**c)**  $\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ r^{2m+1} \left[ (-1)^m \frac{\cos(2m+1)\theta}{2m+1} + \frac{\sin(2m+1)\theta}{2m+1} \right] + r^{2(2m+1)} \frac{\sin 2(2m+1)\theta}{2m+1} \right\}$

**D-50**  $f(x) = \frac{b}{\sqrt{\pi(b-a)}} e^{-bx^2/(b-a)}$

**D-51 a)**  $e^{-b(t-a)}(t-a)u(t-a)$

**b)**  $2e^{-t}(t+2) + e^{-(t-1)}(t-1)u(t-1) - e^{-(t-2)}(t-2)u(t-2)$

**D-52 a)**  $u_0(x, y) = B_0 y \quad \text{og} \quad u_n(x, y) = B_n \cos \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} \quad (n = 1, 2, \dots)$

**b)**  $u(x, y) = \frac{\sinh(\pi y/a)}{\sinh(\pi b/a)} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{\sinh(2\pi y/a)}{\sinh(2\pi b/a)} \cos \frac{2\pi x}{a}$

**D-53 a)**  $\frac{1}{\pi} [1 - e^{-\pi}] + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{1 + n^2} \cos nx$

**b)**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \cosh \pi}{2 \sinh \pi} + \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2 \sinh \pi} + \frac{1}{2}$

**D-54 a)**  $I(s) = \frac{17C}{CRs+1} (e^{-5s} - e^{-10s})$

**b)**  $i(t) = \frac{17}{R} (e^{-(t-5)/RC} u(t-5) - e^{-(t-10)/RC} u(t-10))$

$i(2) = 0, \quad i(7) = (17/R)e^{-2/RC}, \quad i(11) = (17/R)(e^{-6/RC} - e^{-1/RC})$

**D-55**  $\frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{1 + n^2} e^{inx}$

**D-56 a)**  $y(t) = \cosh t$

**b)**  $y(t) = \begin{cases} \sin t - \frac{1}{3} \sin 3t & \text{for } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{for } t > \pi \end{cases}$

**D-57 a)**  $u_n(x, y) = A_n e^{-y/n^2} \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$

**b)**  $u(x, y) = e^{-y} \sin x + e^{-y/4} \sin 2x$

**c)**  $u(x, y) = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) e^{-y/(2m-1)^2} \sin(2m-1)x$

**D-58 a)**  $\hat{f}(w) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ibw} - e^{-iaw}}{w}$

$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x-b)w} - e^{i(x-a)w}}{w} dw = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

**b)**  $\pi i, \quad \pi/2$

**D-59**  $g(s, t) = \frac{1 - e^{-s^2 t}}{s^2}$

$$\text{D-60} \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} \sinh 2t + \frac{1}{4} (e^{2(t-1)} + 3e^{-2(t-1)}) u(t-1) \\ y_2 &= -\frac{3}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{3}{2} \sinh 2(t-1) u(t-1) \end{aligned}$$

$$\text{D-61 a)} \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2} \sin nx, \quad (\pi - a)a$$

$$\text{b)} \quad -(\pi - 1)(32\pi - 100)$$

$$\text{c)} \quad (\pi - a)^2 a^2 / 6$$

$$\text{D-62 a)} \quad v(x, t) = K_1 x + K_2 - \pi K_1$$

$$\text{b)} \quad u(x, t) = x + 2\pi + e^{-t/4} \cos(x/2) - e^{-9t/4} \cos(3x/2)$$

$$\text{D-63 a)} \quad \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \sin(2m+1)x$$

$$\text{b)} \quad u_n(x, t) = B_n e^{-n^2 t - t^2/2} \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\text{c)} \quad u(x, t) = \frac{8}{\pi} e^{-t^2/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} e^{-(2m+1)^2 t} \sin(2m+1)x$$

$$\text{D-64 a)} \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-w^2/2a}}{a}$$

$$\text{b)} \quad \sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{-ax^2/2}$$

$$\text{D-65 a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$$

$$\text{b)} \quad u_n(x, y) = A_n e^x \sin nx \sinh(\sqrt{n^2 + 1} y) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\text{c)} \quad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sinh(\sqrt{n^2 + 1} y)}{n \sinh(\sqrt{n^2 + 1} \pi)} e^x \sin nx$$

$$\text{D-66 b)} \quad \begin{aligned} x &= -t - \frac{5}{3} \sin t + \frac{4}{3} \sin 2t \\ y &= \frac{2}{3} (\cos t - \cos 2t) \end{aligned}$$

$$\text{D-68} \quad f(x, y) = \phi(x + 2y)$$

$$\text{D-69} \quad 2/3; \quad x + 2y + 4z = 2$$

$$\text{D-70} \quad \arctan(1/\sqrt{10}) = 17,5^\circ; \quad \pm \langle 7, -3 \rangle$$

$$\text{D-71} \quad 0; \quad \langle -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \sqrt{3} \rangle$$

$$\text{D-72} \quad \cos(xy + z^2 - 4x + 4y)[(y-4)\mathbf{i} + (x+4)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}]; \quad 4; \quad 4\sqrt{2}$$

$$\text{D-73} \quad -1/\sqrt{2}; \quad \arctan(-1/\sqrt{2}) = -35,3^\circ$$

$$\text{D-74} \quad 50/\sqrt{3} \text{ }^\circ\text{C/min.}$$

$$\text{D-75} \quad -8/3$$