# 1001 måter å integrere på

Gunnar Staff
Institutt for Matematiske fag
Norges Teknologiske Naturvitenskapelige Universitet
N 7491 Trondheim

2001-10-09

**Sammendrag**

Dette notatet er laget på initiativ fra Overstudass SIF5017. Det prøver å illustrere endel av de mest brukte integrasjonsteknikkene, og gi eksempler på bruken. Tilbakemeldinger mottas gjerne. Dette er *IKKE* en del av pensum i SIF5017. Snarere et supplement (støtteliteratur) til de som ønsker å friske opp integrasjonsreglene.

## 1 Diverse

### 1.1 Rottmann

Rottmann vil være tillatt på eksamen. Det anbefales at man bruker litt tid til å få en liten oversikt over hva som finnes der, og hvordan man bruker det. Husk at alt som står i Rottmann kan brukes på eksamen uten annen begrunnelse enn henvisning til formelsamlingen.

**Eks 1.1** Løs integralet

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx.$$

Det er et integral som de fleste vil vegre seg for å prøve å løse. Men i Rottmann s 146 formel 144 finner vi at

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \frac{1}{4}\left(\arcsin x\right)^2 + \frac{1}{4}x^2 + C.$$

### 1.2 Odde og jevne funksjoner

Å vite litt om odde og jevne funksjoner kan spare oss for mye arbeid. Vi definerer odde og jevne funksjoner som

$$\begin{array}{ll} \text{jevn} & f(x = f(-x) \\ \text{odde} & f(x) = -f(-x) \end{array}$$

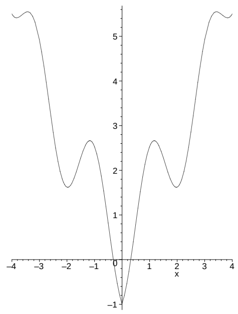

Figure 1: Jevn funksjon

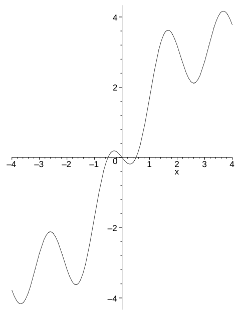

Figure 2: Odde funksjon

Se Fig 1.2 for eksempel på jevn funksjon, og Fig 1.2 for eksempel på odde funksjon.

Vi vet at hvis vi integrerer en odde funksjon over et område symetrisk om origo, vil integralet bli null. Dette sees enklest ved at man ser på Fig 1.2 og legger merke til at arealet i intervallet $[-a, 0]$ under grafen er lik arealet i intervallet $[0, a]$. Hvis vi gjør det samme for en jevn funksjon vil vi få 2 ganger integralet over intervallet $[0, a]$. Det matematiske beviset utelater vi her.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{for } f(x) \text{ odde} \\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{for } f(x) \text{ jevn} \end{cases}$$

Vi prøver at par eksempler for å se hvordan det virker i praksis.

**Eks 1.2** Løs integralet

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$$

Vi ser at $\sin x$ er odde funksjon fordi $\sin(x) = -\sin(-x)$. M.a.o blir integralet null.

**Eks 1.3** Løs integralet

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

Vi ser at $\cos x$ er jevn funksjon fordi $\cos(x) = \cos(-x)$. M.a.o blir integralet

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\int_{0}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

**Eks 1.4** Løs integralet

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx$$

Vi vet fra Eks 1.2 at $\sin x$ er odde funksjon, og vi vet fra Eks 1.3 at $\cos x$ er en jevn funksjon. Jevn funksjon multiplisert med odde blir odde. M.a.o blir integralet lik null.

# 2 Delvis integrasjon

Delvis integrasjon bruker vi når vi er istand til å dele opp integralet vårt i to.

$$\int h(x)dx = \int f(x)g(x)dx, \quad \text{der } h(x) = f(x)g(x)$$

Formelen for delvis integrasjon står i Rottmann formel 4 side 131.

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Hele poenget her er å velge $f'(x)$ og $g(x)$ s.a $\int f(x)g'(x)dx$ blir lettere å løse. Å se hvordan man skal velge $f'(x)$ og $g(x)$ krever ofte litt trening. La oss se på noen eksempler.

**Eks 2.1** Løs integralet

$$\int x \sin x dx$$

Vi starter med å plukke ut $f'$ og $g$. Vi ser at hvis vi deriverer $x$ vil den bli en konstant. Det benytter vi oss av og velger

$$\begin{array}{ll} f = -\cos x & f' = \sin x \\ g = x & g' = 1 \end{array}$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{g} \underbrace{\sin x}_{f'} dx &= \underbrace{x}_{f} \underbrace{(-\cos x)}_{g} - \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{f} dx \\ &= -x\cos x + \sin x = \sin x - x\cos x, \end{aligned}$$

som er et enkelt integral å løse.

Vi prøver med et litt vanskeligere problem.

**Eks 2.2** Løs integralet

$$\int xe^x e^{x-1} dx$$

Dette ser litt vankeligere ut, fordi her har vi 3 ledd å velge mellom. Vi løser det ved å se at $e^x e^{x-1} = e^{2x-1}$ og vi har igjen to klare kandidater til $f'$ og $g$.

$$\begin{array}{ll} f = \frac{1}{2}e^{2x-1} & f' = e^{2x-1} \\ g = x & g' = 1 \end{array}$$

Etter at vi har identifisert $f'$ og $g$ er det bare å sette inn i formelen og regne ut det siste integralet.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^{2x-1}}_{f'}dx &= \underbrace{x}_{f}\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x-1}}_{g} - \int \underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x-1}}_{f}dx \\ &= x\frac{1}{2}e^{2x-1} - \int \frac{1}{2}e^{2x-1}dx = \frac{1}{4}\left(2xe^{2x-1} - e^{2x-1}\right).\end{aligned}$$

Hva gjør vi hvis vi ikke greier å gjøre det siste integralet løselig ved å bruke delvis integrasjon 1 gang? La oss se på et eksempel.

**Eks 2.3** Løs integralet

$$\int x^2 e^{-x} dx$$

Vi starter med å identifisere $f'$ og $g$ som

$$\begin{array}{ll} f = -e^{-x} & f' = e^{-x} \\ g = x^2 & g' = 2x \end{array}$$

Vi setter så inn og får

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_{g}\underbrace{e^{-x}}_{f'}dx &= \underbrace{x^2}_{g}\cdot\underbrace{\left(-e^{-x}\right)}_{f} - \int \underbrace{2x}_{g'}\cdot\underbrace{\left(-e^{-x}\right)}_{f}dx \\ &= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx.\end{aligned}$$

Vi ser at det siste integralet fremdeles ikke er løsbart, men vi har redusert potensen til x-en. Det vi nå gjør er å utføre delvis integrasjon igjen på det siste integralet $\int xe^{-x}dx$ for å bli kvitt x-leddet fullstendig.

$$\begin{array}{ll} f_1 = -e^{-x} & {f'}_1 = e^{-x} \\ g_1 = x & {g_1}' = 1 \end{array}$$

$$\int xe^{-x}dx = \underbrace{x}_{g}\cdot\underbrace{\left(-e^{-x}\right)}_{f'} - \int \underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{\left(-e^{-x}\right)}_{f}dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(1+x)$$

Vi setter så dette inn i vårt opprinnelige integral og får

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx = -x\ 2e^{-x} + 2\cdot\left(-e^{-x}(1+x)\right) = -e^{-x}\left(x^2+2x+2\right).$$

M.a.o må vi av og til utføre delvis integrasjon flere ganger for å kunne løse integralet, evt kombinere det med andre teknikker.

Finnes det integral der vi ikke greier å redusere problemet??

**Eks 2.4** Løs integralet

$$\int e^{2x}\sin 3x dx$$

Vi ser at vi reduserer størrelsen på hverken $e^{2x}$ eller $\sin 3x$ ved å derivere. Men vi prøver alikevel.

$$\begin{array}{ll} f = \frac{1}{2}e^{2x} & f' = x^{2x} \\ g = \sin 3x & g' = 3\cos 3x \end{array}$$

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x dx$$

Her kan det se ut som om vi ikke kommer noen vei. $\int e^{2x}\cos 3x dx$ er ikke noe lettere å løse enn det opprinnelige integralet. Men vi prøver en gang til allikevel

$$\begin{array}{ll} f = \frac{1}{2}e^{2x} & f' = e^{2x} \\ g = cos 3x & g' = -3\sin 3x \end{array}$$

Vi får nå at

$$\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x dx.$$

Integralet på høyre side er det samme som vi startet med. Vi substituerer så dette inn i forrige likning og får

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x dx.$$

Vi løser nå for $\int e^{2x}\sin 3x dx$ og får

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{1}{4}e^{2x}\left(2\sin 3x - 3\cos 3x\right) + C$$

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{1}{13}e^{2x}\left(2\sin 3x - 3\cos 3x\right) + C'$$

Vi ser at vi greide å løse problemet selv om vi ikke reduserte problemet i vanlig forstand!

Hva skal vi gjøre hvis vi har et bestemt integral istedenfor et ubestemt (m.a.o et integral med øvre og nedre grensen)?
Formelen blir som følger.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

**Eks 2.5** Løs det bestemte integralet

$$\int_0^1 \arcsin x dx.$$

Dette illustrerer et nytt poeng i valg av $f'$ og $g$, nemlig

$$\begin{array}{lll} f = x & f' = dx & \\ g = \arcsin x & g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{fra Rottmann side 130} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arcsin x dx &= [x\arcsin x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left[x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

Det ubestemte integralet $\int_0^1 \arcsin x dx$. kunne også vært løst v.h.a Rottmann formel 138 side 145. Integralet $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ løses enklest ved substitusjonemetoden, se eks 3.1

# 3 Integrasjon ved substitusjonsmetoden

Integrasjon ved substitusjonsmetoden er et variabelskifte vi gjør for å ende opp med et penere integral. Metoden står som formel 5 i Rottmann side 131. Det vanskelige her er å se hva men skal substituere med, m.a.o hva man setter til $x = g(u)$, eller på en mer intuitiv måte, $u = g^{-1}(x)$.

$$\int f(x)dx = \int f(g(u))\frac{d}{dx}g(u)du, \quad \text{der } x = g(u)$$

Dette kan se litt komplisert ut, så vi prøver med et eksempel.

**Eks 3.1** Løs integralet

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Vi setter $u = x^2$ og får

$$u = x^2, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \underbrace{=}_{u=x^2} \int \frac{x}{\sqrt{1-u}}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int (1-u)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot -2 \cdot -1(1-u)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\underbrace{=}_{u=x^2} \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1-x^2} + C$$

**Eks 3.2** Løs integralet

$$\int \frac{1}{x}\left(1+\ln x\right)^5 dx$$

Her har vi 3 mulige løsninger, nemlig $u = \frac{1}{x}$, $u = \ln x$ (krever at vi deler opp integralet i 2) og $u = 1 + \ln x$. Vi må bli kvitt enten $\frac{1}{x}$ leddet, eller $1 + \ln x$ ($\ln x$ hvis vi velger å dele opp integralet). Vi prøver med $u = 1 + \ln x$.

$$u = 1 + \ln x, \quad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(1+\ln x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad dx = xdu$$

Vi substituerer nå inn og får

$$\int \frac{1}{x}\underbrace{(1+\ln x)}_{u}^5 dx = \int \frac{1}{x}u^5 x du = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + C.$$

Vi substituerer nå tilbake og får

$$\frac{1}{6}u^6 + C \underbrace{=}_{u=1+\ln x} \frac{1}{6}(1+\ln x)^6 + C,$$

hvilket er svaret!!

**Eks 3.3** Løs integralet

$$\int \sin(3x+4)dx$$

Sinus er på en form vi ikke er vant til, og vi substituerer med

$$u = 3x + 4, \quad \frac{du}{dx} = 3, \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3}du.$$

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned} \int \sin(3x+4)dx &= \frac{1}{3}\int \sin u du = -\frac{1}{3}\cos u + C \\ &= -\frac{1}{3}\cos(3x+4) + C \end{aligned}$$

# 4 Sinus og Cosinus triksing

Å kunne trikse med sinus og cosinus er essensielt for å kunne løse endel integral. Her følger en rask oversikt over de viktigste knepene.

## 4.1 Halvvinkel til sinus og cosinus

I Rottmann side 42 står addisjonsteoremene for sinus og cosinus. Ved å kombinere disse kan man komme frem til

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \tag{1}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta). \tag{2}$$

Dette er viktige sammenhenger som kan brukes ved integrasjon. I Rottmann side 85-> står det flere nyttige sinus/cosinus triks.

**Eks 4.1** Løs integralet

$$\int \sin^2 3x dx$$

Vi bruker likn 1 og får

$$\begin{aligned} \int \sin^2 3x dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 6x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + C \\ &= \frac{1}{12}(6x - \sin 6x) + C. \end{aligned}$$

## 4.2 Trigonometrisk substitusjon

Trigonometrisk substitusjon er et kraftfullt hjelpemiddel ved integral der vi finner ledd som $(a^2 - u^2)^{1/2}$, $(a^2 - u^2)^{3/2}$ og $1/(a^2 + u^2)^2$. Vi kan systematisere det i en tabell.

| Integralet inneholder | Substitusjonen | Bruk av identitet |
|---|---|---|
| $a^2 - u^2$ | $u = a\sin\theta$ | $1 - sin^2\theta = \cos^2\theta$ |
| $a^2 + u^2$ | $u = a\tan\theta$ | $1 + tan^2\theta = \sec^2\theta$ |
| $u^2 - a^2$ | $u = a\sec\theta$ | $sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$ |

Vi prøver med et eksempel.

**Eks 4.2** Løs integralet

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \text{hvor } |x| < 1.$$

Her er $a = 1$ og $u = x$, så vi substituerer med

$$\begin{aligned} x &= \sin\theta, \quad dx = \cos\theta d\theta. \\ \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{\sin^3\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \\ &= \int \sin^3\theta d\theta = \int \sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)d\theta \\ &= \frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta + C. \end{aligned}$$

Vi vet at $\cos\theta = \left(1-\sin^2\theta\right) = \sqrt{1-x^2}$, noe vi bruker når vi substituerer tilbake og får

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{2}{3}} - \sqrt{1-x^2} + C.$$

**Eks 4.3** Løs integralet

$$\int \sqrt{a^2-u^2}du, \qquad |u| < a.$$

Dette passer glimrende med første situasjon i tabellen vår, og vi setter $u = a\sin\theta$ og $du = a\cos\theta d\theta$ og får

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2-u^2}du &= \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}(a\cos\theta)d\theta \\ &= \int a^2\cos^2\theta d\theta \underbrace{=}_{\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)} \frac{1}{2}a^2\int\left(1+\cos\left(2\theta\right)\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2}a^2\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+C \underbrace{=}_{\frac{1}{2}\sin\theta=\sin\theta\cos\theta} \frac{1}{2}a^2\left(\theta+\sin\theta\cos\theta\right)+C. \end{aligned}$$

Den først substitusjonen får vi fra likning 2. Den andre substitusjonen får vi fra Rottmann side 87 som sier $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$. Denne identiteten bruker vi ved tilbakesubstitusjonen og får $\sin\theta = \frac{u}{a}$, og $\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a}$. Dette gir oss

$$\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{1}{2}a^2\left(\sin^{-1}\frac{u}{a}+\frac{u}{a}\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a}\right)+C = \frac{u}{a}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C.$$

**Eks 4.4** Løs integralet

$$\int \frac{1}{\left(4x^2+9\right)^2}dx.$$

Vi kjenner igjen situasjon 2 fra tabellen vår med $u = 2x$ og $a = 3$. Det gir oss med $u = a\tan\theta$ følgende substitusjoner.

$$2x = 3\tan\theta, \qquad x = \frac{3}{2}\tan\theta, \qquad dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta d\theta.$$

Vi setter inn og får

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\left(4x^2+9\right)^2}dx &= \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2\theta}{\left(9\tan^2\theta+9\right)^2}d\theta \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{\sec^2\theta}{\left(9\sec^2\theta\right)^2}d\theta = \frac{1}{54}\int \frac{1}{\sec^2\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{54}\int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{108}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+C
\end{aligned}$$

Integrasjonen er den samme som vi gjorde i Eks 4.3. Vi vet at $\theta = \tan^{-1}(\frac{2x}{3})$ og finner ved å lage Fig 3 at

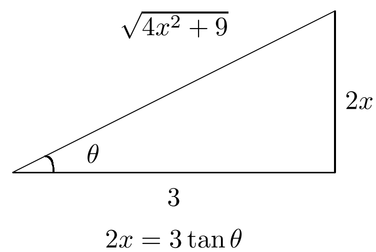


Figure 3: Trigonometrisk fremstilling av $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$

$$\sin\theta = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+9}}, \qquad \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{4x^2+9}}.$$

Vi substituerer tilbake med dette og får

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\left(4x^2+9\right)^2}dx &= \frac{1}{108}\left[\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)+\frac{2x}{\sqrt{4x^2+9}}\cdot\frac{3}{\sqrt{4x^2+9}}\right]+C \\
&= \frac{1}{108}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)+\frac{x}{18\left(4x^2+9\right)}+C.
\end{aligned}$$

**Eks 4.5** Løs integralet

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx, \qquad x>5.$$

Vi har nå det siste tilfellet i tabellen vår. Vi substituerer med $x = \sec\theta$, $dx = 5\sec\theta\tan\theta d\theta$, og får

$$\sqrt{x^2-25} = \sqrt{25\left(\sec^2\theta-1\right)} = 5\tan\theta.$$

Siden $x>5$ impliserer det at $0<x<\pi/2$, slik at $\tan\theta>0$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx &= \int \frac{5\tan\theta}{5\sec\theta}(5\sec\theta\tan\theta)d\theta \\
&= 5\int \tan^2\theta d\theta = 5\int \left(\sec^2\theta-1\right)d\theta \\
&= 5\tan\theta-5\theta+C = \sqrt{x^2-25}-5\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)+C.
\end{aligned}$$

# LYKKE TIL!!