**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag (735 935 21)

# EKSAMEN I TMA4135 MATEMATIKK 4D

Bokmål
Tirsdag 10. august 2004
Tid: 09:00 – 14:00, Sensur 01.09.04

Hjelpemidler:
Enkel kalkulator (HP30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

## Oppgave 1

**a)** Finn $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right)$ og $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^2+\omega^2}\right)$ når $\omega > 0$ og $a \geq 0$.

**b)** Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 4y = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

der $r(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{for } t > 1 \end{cases}$

**c)** Skissér grafen til $y(t)$ når

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

der $\delta(t - \pi)$ er Diracs deltafunksjon.

**Oppgave 2**

**a)** Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{for } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{for } 0 \le x < \pi; \end{cases}$$

som antas å være periodisk med periode $2\pi$. Finn Fourier-rekka til $f(x)$.

**b)** Funksjonen $g(x)$ er også periodisk med periode $2\pi$ og

$$g(x) = \begin{cases} -\pi e^{x} & \text{for } -\pi < x < 0, \\ \pi e^{-x} & \text{for } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

Det oppgis at $g(x)$ har Fourier-rekke

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \left(1 - (-1)^n e^{-\pi}\right) \sin nx \tag{$*$}$$

Hva er summen av rekka $(*)$ for $x = \pi/2$ og for $x = 3\pi/2$?

**Oppgave 3** Gitt den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} + 6u + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

**a)** Finn de løsninger på formen

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$

som tilfredstiller kravene

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \text{for } y > 0. \tag{$*$}$$

**b)** Finn en løsning av (1) som i tillegg til $(*)$ oppfyller

$$u(x, 1) = e^{-2x} \sin^3 x$$

(Oppgitt formel: $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$)

**Oppgave 4** Vi skal løse Poissons ligning

$$u_{xx} + u_{yy} = x(x-1)y(y-1)$$

på området $[0, 1] \times [0, 1]$. Randbetingelsene er $u(x, 0) = u(0, y) = u(x, 1) = u(1, y) = 0$. $\Delta x = \Delta y = 0.25$.

**a)** Sett opp ligningssystemet for de ukjente verdiene i gitteret.

**b)** Bruk startvektor som består av bare nuller og gjør én iterasjon med Gauss–Seidels metode.

**Oppgave 5**

**a)** Gjør én iterasjon med Newtons metode på systemet

$$\begin{aligned} 4\,x_1^2 - 20\,x_1 + \frac{1}{4}\,x_2^2 + 8 &= 0 \\ \frac{1}{2}\,x_1 x_2^2 + 2\,x_1 - 5\,x_2 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

med startvektor $x^0 = (0,0)^T$.

**b)** Newtons metode på skalare ligninger skrives som

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}.$$

Det er ikke alltid vi har $f'(x)$ tilgjengelig, da må vi til med en numerisk approksimasjon. Sett inn en baklengs differanseformel for $f'(x^n)$ som involverer $x^n$ og $x^{n-1}$ og skriv hvordan metoden blir seende ut.

**Oppgave 6** Gjør ett steg med Heuns metode med skrittlengde $h = 0.1$ på differensialligningen

$$y'(t) = 3yt + 1 \qquad y(1) = 1$$