Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68
Elena Celledoni tlf. 73 59 35 41

EKSAMEN I TMA4135 MATEMATIKK 4D

Bokmål
Fredag 12. august 2005
kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 5. september 2005.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Skisser grafen til funksjonen $r(t)$ gitt ved

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 1, \\ t-1 & \text{for } 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{for } 2 \leq t \end{cases}$$

b) Finn den Laplacetransformerte $R(s) = \mathcal{L}(r(t))(s)$ hvor $r(t)$ er definert som i punkt a).

c) Bruk Laplacetransformasjonen til å løse initialverdiproblemet

$$y' - 2y + \int_0^t y(v)dv = u(t-1), \qquad y(0) = 0,$$

hvor $u(t-1)$ er enhetstrappefunksjonen.

Oppgave 2

a) Finn Fourierkoeffisientene til den periodiske funksjonen $f(x)$, definert ved at perioden er 2π og at

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{for} \quad -\pi \le x < \pi.$$

b) Finn summen til hver av rekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Oppgave 3

a) Finn alle løsninger på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ av den partielle differensialligningen

$$u_t = u_{xx} \qquad \text{for} \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \tag{1}$$

med randbetingelsene

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \qquad \text{for} \quad t \ge 0. \tag{2}$$

(Denne ligningen modellerer temperaturfordelingen i en tynn isolert metallstav der også endepunktene er isolerte.)

b) I tillegg til (1) og (2) innfører vi initialbetingelsen

$$u(x,0) = \cosh x \quad \text{for} \quad -\pi \le x \le \pi. \tag{3}$$

Finn funksjonen $u(x,t)$ som tilfredsstiller (1), (2) og (3).

Hvis du ikke har funnet Fourirkoeffisientene til $\cosh x$ i oppgave 2, kan du erstatte funksjonen $\cosh x$ i initialbetingelsen med en funksjon som har Fourierkoeffisientene

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2+1} \quad \text{for} \quad n \ge 0.$$

Oppgave 4 Finn den retningsderiverte i retningen av vektoren $\mathbf{v} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ av funksjonen $x + xy + xyz$ i punktet $P : (1,-1,1)$.

Oppgave 5 Finn polynomet av minst mulig grad, som interpolerer datasettet

x_k	0	1	2	3	4
$f(x_k)$	1	-1	-1	1	5

.

Oppgave 6 Utfør én iterasjon med Gauss–Seidels metode på ligningssystemet

$$\begin{aligned} -4x + 4y \phantom{{}+2z} &= 16 \\ x - 4y + 2z &= 12 \\ 2y - 4z &= 9 \end{aligned}$$

med startverdiene $x^{(0)} = -14$, $y^{(0)} = -10$, $z^{(0)} = -7$.

Oppgave 7 Vi betrakter initialverdiproblemet

$$x'' + 2x' - x = 3 - t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2. \tag{4}$$

a) Skriv (4) som et initialverdiproblem for et system av to førsteordens differensialligninger. Det vil si av formen $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

b) Gjør ett skritt med Heuns metode, med skrittlengde $h = 0.1$, på systemet du fant i punkt a).

Hvis du ikke klarte punkt a), kan du isteden bruke følgende initialverdiproblem:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 + t \\ -y_1 + 2y_2 - t \end{pmatrix}, \quad \text{med} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2.$$

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

  Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{n+1}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) - \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)} \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ \text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{aligned}$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= h\, \mathbf{f}(x_n,\, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{K}_2 &= h\, \mathbf{f}(x_n + h,\, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \end{aligned}$$

Se også formlene i Rottmann.

Tabell over Laplacetransformerte

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$