**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



# LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN TMA4135 MATEMATIKK 4D, 17.12.2004

## Oppgave 1

**a)** Ved hjelp av enhetstrinnfunksjonen (unit step function) $u$ skriver vi $r(t) = u(t-1) - u(t-2)$, og fra tabellen har vi da

$$\underline{\underline{R(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}}}.$$

**b)** Vi tar Laplacetransformert av begge sider av ligningen og bruker svaret fra (a). Det gir

$$(s^2+1)Y(s) = R(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s} \implies Y(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s(s^2+1)}.$$

Delbrøkoppspaltning gir $\dfrac{1}{s(s^2-1)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}$, og følgelig

$$Y(s) = \left(e^{-s} - e^{-2s}\right) G(s) \quad \text{der} \quad G(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

Invers Laplacetransformert av $G(s)$ er (fra tabell) $g(t) = 1 - \cos t$. Fra $t$-forskyvningsregelen (second shifting theorem) får vi derfor

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(e^{-s} - e^{-2s}\right) G(s)\right\} = u(t-1)g(t-1) - u(t-2)g(t-2) \\ &= \underline{\underline{u(t-1)\left(1 - \cos(t-1)\right) - u(t-2)\left(1 - \cos(t-2)\right)}}. \end{aligned}$$

Alternativt kan svaret skrives

$$\underline{\underline{y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 1, \\ 1 - \cos(t-1) & \text{for } 1 < t < 2, \\ \cos(t-2) - \cos(t-1) & \text{for } t > 2 \end{cases}}}$$

**Oppgave 2**

**a)** Vi setter $u(x,t) = F(x)G(t)$ inn i ligningen og får $F(x)G'(t) = F''(x)G(t)$. Divisjon med $F(x)G(t)$ på begge sider gir
$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$
der $k$ er en konstant (siden venstresiden kun er en funksjon av $t$, mens høyresiden kun er en funksjon av $x$). Dette gir oss to ordinære differensialligninger:

(1) $\quad F''(x) = kF(x) \quad$ med $\quad F(0) = F(\pi) = 0 \quad$ (pga. randbetingelsene),

(2) $\quad G'(t) = kG(t)$

Vi løser først (1). Vi ser på tre muligheter: $k > 0$, $k = 0$ og $k < 0$.

Hvis $k > 0$, kan vi skrive $k = \mu^2$ der $\mu > 0$, og karakteristisk ligning er $\lambda^2 = \mu^2$ som gir $\lambda = \pm\mu$. Generell løsning er da $F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$, men betingelsene $F(0) = F(\pi) = 0$ medfører $A = B = 0$, som er uinteressant.

Hvis $k = 0$, er $F(x) = Ax + B$, men igjen medfører $F(0) = F(\pi) = 0$ at $A = B = 0$.

Vi står igjen med $k < 0$. Da skriver vi $k = -\mu^2$ der $\mu > 0$. Karakteristisk ligning er nå $\lambda^2 = -\mu^2$ som gir $\lambda = \pm i\mu$. Generell løsning er derfor $F(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$. Betingelsen $F(0) = 0$ gir $A = 0$. Fra $F(\pi) = 0$ får vi derfor $B\sin(\mu\pi) = 0$, og siden vi ser bort fra tilfellet $B = 0$ (som gir den trivielle løsningen $F(x) \equiv 0$ og derfor er uinteressant), følger det at $\mu\pi = n\pi$ for en $n = 1, 2, 3, \ldots$, dvs. $\mu = n$.

Vi konkluderer at
$$F_n(x) = B_n \sin(nx) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
er de eneste ikke-trivielle løsningene av (1).

Vi fant over at $k = -\mu^2 = -n^2$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$, og setter vi dette inn i (2) og løser (f.eks. vha. integrerende faktor, eller ved separasjon), får vi
$$G_n(t) = C_n e^{-n^2 t}$$

Vi har derfor
$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = \underline{\underline{D_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)}}$$
der $D_n$ er vilkårlige konstanter.

**b)** Superposisjonsprinsippet gir oss løsninger
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

Hvis vi setter $t = 0$ her, får vi
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(nx)$$

Men vi har fått oppgitt initialbetingelsen

$$u(x,0) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x).$$

Vi må derfor ta $D_1 = 1$, $D_2 = 0$, $D_3 = 1/3$ og $D_n = 0$ for alle $n \geq 4$.
Svaret er derfor

$$u(x,t) = \underline{\underline{e^{-t}\sin(x) + \frac{1}{3}e^{-9t}\sin(3x)}}.$$

**Oppgave 3**

**a)** Med $f(x)$ som gitt i oppgaven har vi

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos(wx)\,dx \quad \text{og} \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin(wx)\,dx.$$

Formlene 132 og 133 i Rottmann nederst på s. 144 gir oss de ubestemte integralene

$$\int e^{-x}\cos(wx)\,dx = \frac{e^{-x}}{1+w^2}\left(-\cos(wx) + w\sin(wx)\right),$$
$$\int e^{-x}\sin(wx)\,dx = \frac{e^{-x}}{1+w^2}\left(-\sin(wx) - w\cos(wx)\right)$$

og når vi evaluerer disse over intervallet $0 < x < +\infty$, får vi ikke noe bidrag i $x = +\infty$, siden $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cos(wx) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sin(wx) = 0$.

Konklusjonen blir at

$$A(w) = \underline{\underline{\frac{1}{\pi(1+w^2)}}} \quad \text{og} \quad B(w) = \underline{\underline{\frac{w}{\pi(1+w^2)}}}.$$

**b)** Fra konvergensteoremet for Fourierintegralet (Thm. 1, s. 559 i Kreyszig) vet vi at $f$ er gitt ved sitt Fourierintegral, bortsett fra i $x = 0$, hvor $f$ er diskontinuerlig. For $x > 0$ har vi derfor

$$f(x) = e^{-x} = \int_0^\infty \left[A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)\right]dw = \int_0^\infty \frac{\cos(wx) + w\sin(wx)}{\pi(1+w^2)}\,dw$$

og tilsvarende for $x < 0$:

$$f(x) = 0 = \int_0^\infty \frac{\cos(wx) + w\sin(wx)}{\pi(1+w^2)}\,dw$$

Tar vi nå $x = \pm 1$ og legger sammen de to integralene over, og bruker at $\sin(-w) = -\sin(w)$, så får vi

$$0 + e^{-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos w}{1+w^2}\,dw \implies \int_0^\infty \frac{\cos w}{1+w^2}\,dw = \underline{\underline{\frac{\pi}{2e}}}.$$

**Oppgave 4** Gradienten til funksjonen $f(x, y, z) = 2xy(e^z - e^x)$ er

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= 2y(e^z - (1+x)e^x)\mathbf{i} + 2x(e^z - e^x)\mathbf{j} + 2xye^z\mathbf{k}\end{aligned}$$

I punktet $P : (1, -1, 1)$ er derfor gradienten

$$\operatorname{grad} f|_P = 2e(\mathbf{i} - \mathbf{k})$$

Vektoren som står vinkelrett på $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ med negativ $\mathbf{k}$-komponent og lengde 1 er $\mathbf{v} = \frac{1}{3}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$.

Vi finner den retningsderiverte ved å ta indreproduktet

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f = \operatorname{grad} f|_P \cdot \mathbf{v} = 2e(\mathbf{i} - \mathbf{k}) \cdot \frac{1}{3}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \underline{\underline{2e}}$$

**Oppgave 5**

Dividert differansetabell:

| $x_k$ | $f(x_k)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | |
| | | $\frac{1-0}{1-0} = 1$ | | | |
| 1 | 1 | | $\frac{-1-1}{2-0} = -1$ | | |
| | | $\frac{0-1}{2-1} = -1$ | | $\frac{0-(-1)}{3-0} = \frac{1}{3}$ | |
| 2 | 0 | | $\frac{-1-(-1)}{3-1} = 0$ | | $\frac{1/3-1/3}{4-0} = 0$ |
| | | $\frac{-1-0}{3-2} = -1$ | | $\frac{1-0}{4-1} = \frac{1}{3}$ | |
| 3 | -1 | | $\frac{1-(-1)}{4-2} = 1$ | | |
| | | $\frac{0-(-1)}{4-3} = 1$ | | | |
| 4 | 0 | | | | |

Newtons formel gir da:

$$p(x) = 0 + 1(x-0) + (-1)(x-0)(x-1) + \frac{1}{3}(x-0)(x-1)(x-2) + 0(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$= \underline{\underline{\frac{8}{3}x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3}}.$$

**Oppgave 6**

**a)** Vi innfører en ny avhengig variabel $y = x'$. Da er $y' = x'' = -x + 6\cos t$ og $y(0) = x'(0) = 3$. Systemet er derfor

$$\underline{\underline{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + 6\cos t, \end{cases} \quad \text{med} \quad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 3. \end{cases}}}$$

**b)** Vi lar $h = 0.1$. Eulers metode anvendt på systemet fra punkt (a) gir:

Startverdier:

$$t_0 = 0$$
$$x_0 = 2$$
$$y_0 = 3$$

Ett skritt:

$$t_1 = t_0 + h = 0.1$$
$$x_1 = x_0 + hy_0 = 2 + 0.3 = \underline{\underline{2.3}}$$
$$y_1 = y_0 + h(-x_0 + 6\cos t_0) = 3 + 0.4 = \underline{\underline{3.4}}$$

**Alternativt**, Eulers metode for systemet

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + t, \end{cases} \quad \text{med} \quad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

blir som følger:

Startverdier:

$$t_0 = 0$$
$$x_0 = 2$$
$$y_0 = 1$$

Ett skritt:

$$\begin{aligned}
t_1 &= t_0 + h = 0.1 \\
x_1 &= x_0 + h(x_0 - y_0) = 2 + 0.1 = \underline{\underline{\underline{2.1}}} \\
y_1 &= y_0 + h(-x_0 + t_0) = 1 - 0.2 = \underline{\underline{\underline{0.8}}}
\end{aligned}$$