Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG
Matematikk 4D TMA4135
Tirsdag 10. august 2004

Oppgave 1

a)

$$\frac{1}{\omega}\sin\omega t \qquad \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t) \qquad \frac{1}{\omega}\sin\omega(t-a)u(t-a)$$

b)

$$\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}(1-\cos(2t-1))u(t-1)$$

c)

Oppgave 2

a)

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$$

b)

$$\pi \mathrm{e}^{-\pi/2} \qquad -\pi \mathrm{e}^{-\pi/2}$$

Oppgave 3

a)

$$u_n(x,y) = C_n \mathrm{e}^{-2x}\sin nx \cdot \mathrm{e}^{(2-n^2)/y}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b)

$$u(x,y) = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-1-2x}\sin x \cdot \mathrm{e}^{1/y} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{7-2x}\sin 3x \cdot \mathrm{e}^{-7/u}$$

Oppgave 4 Vi lar $u_{i,j}$ være vår approksimasjon til $u(i\Delta x, j\Delta y)$.

a)

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0.25^2 \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^2 \\
0.25^2 \cdot 0.5^2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \\
0.25^2 \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^2 \\
0.25^2 \cdot 0.5^2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \\
0.25^2 \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2 \\
0.25^2 \cdot 0.5^2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \\
0.25^2 \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^2 \\
0.25^2 \cdot 0.5^2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \\
0.25^2 \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^2
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0.002197 \\ 0.002930 \\ 0.002197 \\ 0.002930 \\ 0.003906 \\ 0.002930 \\ 0.002197 \\ 0.002930 \\ 0.002197
\end{pmatrix}
$$

b) Med null som startverdi får vi disse verdiene etter en iterasjon med Gauss–Seidel

$$
\begin{pmatrix}
u_{1,1}^{(1)} \\ u_{2,1}^{(1)} \\ u_{3,1}^{(1)} \\ u_{1,2}^{(1)} \\ u_{2,2}^{(1)} \\ u_{3,2}^{(1)} \\ u_{1,3}^{(1)} \\ u_{2,3}^{(1)} \\ u_{3,3}^{(1)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-0.00054931640625 \\
-0.00086975097656 \\
-0.00076675415039 \\
-0.00086975097656 \\
-0.00141143798828 \\
-0.00127696990967 \\
-0.00076675415039 \\
-0.00127696990967 \\
-0.00118780136108
\end{pmatrix}
$$

Det er også mulig å utnytte symmetrien i problemet og få kun fire ligninger (og litt andre tallsvar etter én iterasjon).

Oppgave 5

a) Jacobimatrisa blir

$$J(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 20 & \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_2^2 + 2 & x_1x_2 - 5 \end{pmatrix}$$

og én iterasjon med Newtons metode blir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} &= x^{(1)} = x^{(0)} - J(x^{(0)})^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.76 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) En baklengs differanseformel for $f'(x^n)$ er

$$f'(x^n) \approx \frac{f(x^n) - f(x^{n-1})}{x^n - x^{n-1}}$$

som vi setter inn i Newtons metode. Vi får da

$$x^{n+1} = x^n - f(x^n)\frac{x^n - x^{n-1}}{f(x^n) - f(x^{n-1})}$$

som gjenkjennes som sekantmetoden gjengitt i Kreyszig s. 846, ligning 10. Det er ikke lurt å trekke dette uttrykket sammen til en brøkstrek siden det kan føre til tap av signifikante siffer, men det spørres det ikke om i oppgaven.

Oppgave 6 Ett tidsskritt med Heuns metode. Først en temporær verdi:

$$\begin{aligned} y_1^* &= y_0 + h \cdot f(t_0, y_0) \\ &= 1 + 0.1 \cdot (3 \cdot 1 \cdot 1 + 1) = 1.4 \end{aligned}$$

Verdien $y(1.1)$ approksimerer vi da med

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(f(t_0, y_0) + f(t_0 + h, y_1^*)) \\ &= 1 + 0.05((3 \cdot 1 \cdot 1 + 1)) + (3 \cdot 1.1 \cdot 1.4 + 1)) = 1.481 \end{aligned}$$