

TMA4130/35 MATEMATIKK 4N/D

Midtsemesterprøve 16. oktober 2004 kl. 10:00

Tid: 90 minutter

Hjelpemidler: Enkel kalkulator (HP30S)

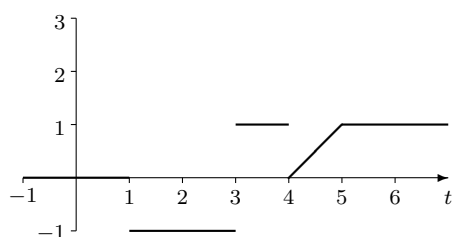
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Kreyszig: *“Advanced Engineering Mathematics”*

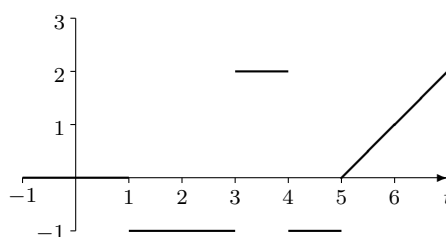
NB: Sett *ett* kryss for hver oppgave på svararket. *Ikke* skriv på oppgavearket!

Oppgave 1 La $r(t) = -u(t - 1) + 2u(t - 3) - u(t - 4) + (t - 4)u(t - 5)$, der $u(t)$ er trinnfunksjonen (også kalt Heavisidefunksjonen eller “unit step function”). Hvilken av de følgende figurene viser grafen til $r(t)$?

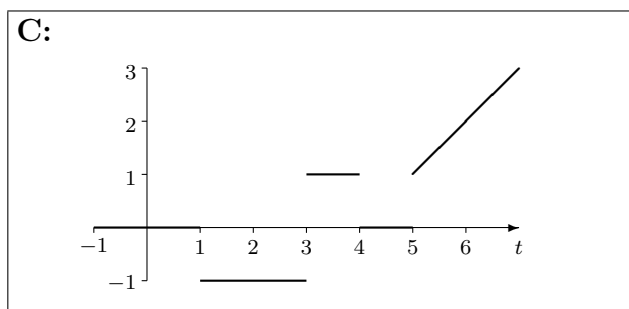
A:



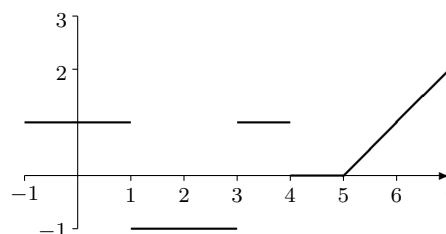
B:



C:



D:



Vi har at $r(6) = 2$. Svaret er **C**.

Oppgave 2 Gitt initialverdiproblemet $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Den Laplacetransformerte $Y(s)$ av løsningen $y(t)$ er:

A: $Y(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$ **B:** $Y(s) = \frac{1}{s^2}$ **C:** $Y(s) = \frac{s}{s^2+2}$ **D:** $Y(s) = \frac{s^2}{s+1}$

Riktig svaralternativ er **A**.

Oppgave 3 Den Laplacetransformerte til funksjonen $tu(t-1)$ er:

A: $\frac{1}{s}e^{-s}$ **B:** $\frac{1}{s^2}e^{-s}$ **C:** $\frac{1-s}{s^2}e^{-s}$ **D:** $\frac{1+s}{s^2}e^{-s}$

Funksjonen kan skrives som $f(t) = (1 + (t-1))u(t-1)$. Det er altså funksjonen $1+t$ som er skiftet en enhet til høyre. Siden $\mathcal{L}(1+t)(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$ får vi fra andre skifteteorem at $\mathcal{L}(f)(s) = e^{-s} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right)$. Riktig svaralternativ er **D**.

Oppgave 4 Løsningen til integralligningen $y(t) = t - \int_0^t y(\tau)(t-\tau)d\tau$ er:

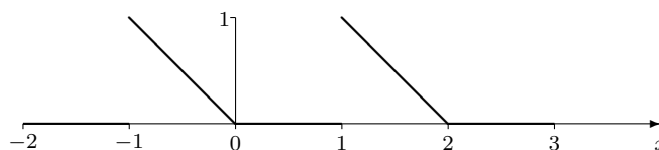
A: $\cos t$ **B:** e^{-t} **C:** $\sin t$ **D:** $\cos t + e^{-t}$

Ligningen kan skrives som $y(t) = t - y(t) * t$ hvor $*$ er konvolusjonsproduktet. Ved bruk av konvolusjonsteoremet, (Teorem 1 s. 279) får vi at den transformerte ligningen er $Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{Y(s)}{s^2}$, $Y(s)\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$ og da $Y = \frac{1}{s^2+1}$. Løsningen er

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t.$$

Riktig svaralternativ er **C**.

Oppgave 5 La $f(x)$ være en funksjon med periode 2, og med graf som vist på figuren:



I punktet $x = 1$ konvergerer denne funksjonens Fourierrekke mot verdien:

A: 0 **B:** $\frac{1}{2}$ **C:** 1 **D:** -2

Funksjonen er stykkevis kontinuert og den har både høyre og venstre deriverte overalt. Derfor konvergerer Fourierrekken mot $\frac{1}{2}(f(1-0) + f(1+0)) = \frac{1}{2}$. Riktig svaralternativ er **B**.

Oppgave 6 En odde, periodisk funksjon f , med periode 2 er definert som

$$f(x) = x(1 - x) \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Funksjonsverdien $f(11,3)$ er:

A: $-116,39$

B: $-0,39$

C: $0,21$

D: $-0,21$

Vi har $f(11,3) = f(1,3) = -f(-1,3) = -f(0,7) = -0,7 \cdot 0,3 = -0,21$. Riktig svaralternativ er **D**.

Oppgave 7 Fourierrekken til funksjonen $f(x)$ definert i oppgave 6 er

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x).$$

Fourierkoeffisienten a_0 er:

A: $\frac{1}{6}$

B: $\frac{1}{3\pi}$

C: 0

D: $\frac{\pi}{6}$

Funksjonen er odde, så $a_n = 0$ for alle n . Riktig svaralternativ er **C**.

Oppgave 8 Hvilket av alternativene er løsning av $u_x + u_y = 0$?

A: $u(x, y) = Ce^{k(x+y)}$

B: $u(x, y) = C \sin kx e^{-ky}$

C: $u(x, y) = Ce^{-kx} \sin ky$

D: $u(x, y) = C \frac{e^{kx}}{e^{ky}}$

Vi bruker metoden med separasjon av variablene og skriver $u(x, y) = F(x)G(y)$. Ved innsetting får vi

$$\begin{aligned} F' G + F G' &= 0, & \text{som ved divisjon med } FG \text{ gir} \\ \frac{F'}{F} + \frac{G'}{G} &= 0, & \text{som igjen gir} \\ \frac{F'}{F} &= -\frac{G'}{G} = k. \end{aligned}$$

De ordinære differensialligningene $F' - kF = 0$ og $G' + kG = 0$ har respektive løsninger, $F = C_1 e^{kx}$ og $G = C_2 e^{-ky}$, og dermed er

$$u(x, y) = C e^{kx} e^{-ky} = C e^{k(x-y)} = C \frac{e^{kx}}{e^{ky}}.$$

Riktig svaralternativ er **D**.

Oppgave 9 La $f(x)$ være den 2π -periodiske funksjonen gitt ved

$$f(x) = x(\pi - |x|) \quad \text{for} \quad -\pi < x \leq \pi.$$

Det oppgis at Fourierrekken til $f(x)$ er $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

Summen av rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ er:

A: $\frac{\pi^5}{316}$

B: $\frac{\pi^4}{100}$

C: $\frac{\pi^2}{10}$

D: $\frac{\pi^3}{32}$

Funksjonen $f(x)$ er kontinuerlig overalt (og deriverbar), så Fourierrekken konvergerer til $f(x)$ for alle x (Teorem 1 i avsnitt 10.2 av Kreyszig). Sett inn $x = \pi/2$ og bruk at

$$\sin \frac{(2n-1)\pi}{2} = (-1)^{n+1}$$

for å finne at rett svaralternativ er **D**.

Oppgave 10 La funksjonen $f(x)$ være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{for } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{for } |x| > 1. \end{cases}$$

Bruk Fourier-integralet til $f(x)$ til å finne verdien av integralet $\int_0^{\infty} \frac{\cos w - \cos^2 w}{w^2} dw$.

Svaret er:

A: $\frac{\pi}{2}$

B: -1000

C: 0

D: 1

Fourierintegralet (se formler side 559 i Kreyszig) er

$$\int_0^{\infty} (A(w) \cos wx + B(w) \sin wx) dw$$

Siden $f(x)$ er en likefunksjon er $B(w) = 0$, og $A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-x) \cos wx dx$. Delvisintegrasjon viser at $A(w) = \frac{2}{\pi} \frac{1-\cos w}{w^2}$. Fra Teorem 1 i avsnitt 10.8 vet vi at

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1-\cos w}{w^2} \cos wx dw$$

Sett $x = 1$ for å finne at rett svaralternativ er **C**.