TMA4130/35 MATEMATIKK 4N/D

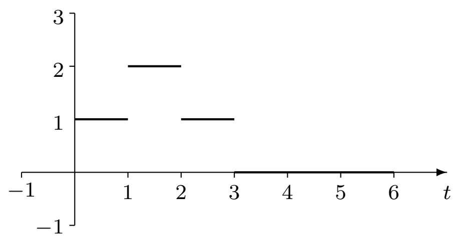
Midtsemesterprøve torsdag 25. november 2004 kl. 17:15
Tid: 90 minutter

Hjelpemidler: Enkel kalkulator (HP30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*
Kreyszig: *Advanced Engineering Mathematics*

NB: Sett *ett* kryss for hver oppgave på svararket. *Ikke* skriv på oppgavearket!

Oppgave 1

Hvilken av funksjonene har graf som vist på figuren til høyre.



$\boxed{\textbf{A:}\quad u(t)+u(t-1)-u(t-2)-u(t-3)}$ **B:** $u(t)+u(t+1)-u(t+2)-u(t+3)$

C: $u(t)+2u(t-1)+u(t-2)$ **D:** $u(t)+2u(t+1)+u(t+2)$

Svaret er **A**.

Oppgave 2

Den inverse Laplacetransformerte til $F(s) = \dfrac{1}{s(s-a)}$ er:

A: ae^{at} $\boxed{\textbf{B:}\quad \dfrac{1}{a}(e^{at}-1)}$ **C:** $\dfrac{1}{a}(e^{t}-1)$ **D:** e^{at}

Ved bruk av Teorem 3 s. 262 om Laplace transform av integralet av en funksjon, har vi

$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s(s-a)}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s-a)}) = \int_0^t e^{a\tau}d\tau = \left[\frac{1}{a}e^{a\tau}\right]_0^t = \frac{1}{a}(e^{at}-1)$, og svaret er **B**.

Oppgave 3 Gitt initialverdiproblemet $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Den Laplacetransformerte $Y(s)$ av løsningen $y(t)$ er:

$\boxed{\textbf{A:}\quad Y(s) = \dfrac{s+1}{s^2+1}}$ **B:** $Y(s) = \dfrac{1}{s^2}$ **C:** $Y(s) = \dfrac{s}{s^2+2}$ **D:** $Y(s) = \dfrac{s^2}{s+1}$

Riktig svaralternativ er **A**.

Oppgave 4

Bruk konvolusjonsteoremet for Laplacetransformasjonen (Teorem 1 i avsnitt 5.5 av Kreyszig) til å regne ut $t * t * t * t * t$. Svaret er:

A: t^5 $\boxed{\textbf{B:}\ \frac{t^9}{9!}}$ **C:** e^{5t} **D:** $\frac{1}{6}t^6$

Siden $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$, gir konvolusjonsteoremet $\mathcal{L}\{t*t*t*t*t\} = \frac{1}{s^{10}}$. Fra tabell i Kreyszig finner vi at invers Laplacetransformert av $\frac{1}{s^{10}}$ er $\frac{t^9}{9!}$. Svaret er altså **B**.

Oppgave 5

Den Laplacetransformerte av funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} e^t \sin t & \text{for } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{for } t > \pi \end{cases}$$

er:

A: $\frac{1-e^{\pi(1-s)}}{(s-1)^2+1}$ **B:** $\frac{1-e^{\pi(1-s)}}{(s-3)^2+1}$ **C:** $\frac{1+e^{-\pi s}}{(s-3)^2+3^2}$ $\boxed{\textbf{D:}\ \frac{1+e^{\pi(1-s)}}{s^2-2s+2}}$

Vi skriver

$$\begin{aligned} f(t) &= [1-u(t-\pi)]\, e^t \sin t \\ &= e^t \sin t - u(t-\pi)e^{t-\pi+\pi}\sin(t-\pi+\pi) \\ &= e^t \sin t + e^\pi u(t-\pi)e^{t-\pi}\sin(t-\pi) \\ &= g(t) + e^\pi u(t-\pi)g(t-\pi), \end{aligned}$$

der $g(t) = e^t \sin t$ med Laplacetransformert $G(s) = \frac{1}{(s-1)^2+1}$. Det følger at

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = G(s) + e^\pi e^{-\pi s}G(s) = \frac{1+e^{\pi(1-s)}}{(s-1)^2+1}.$$

Svaret er altså **D**.

Oppgave 6 Laplacetransformen til funksjonen $te^{2t}u(t-1)$ er:

$\boxed{\textbf{A:}\ \frac{s-1}{(s-2)^2}e^{-(s-2)}}$ **B:** $\frac{s+3}{(s+2)^2}e^{-(s+2)}$ **C:** $\frac{1}{(s-2)^2}e^{-(s-2)}$ **D:** $\frac{1}{(s-1)^2}e^{-s}$

Funksjonen kan skrives som $f(t) = e^{2t}(1+(t-1))u(t-1)$. Transformen blir derfor Transformen til $(1+(t-1))u(t-1)$ flyttet 2 enheter til høyre.

Svaret er **A**.

Oppgave 7 En like, periodisk funksjon f, med periode 2 er definert som

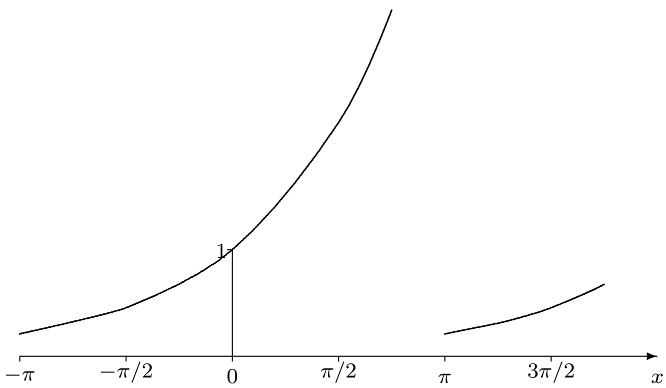
$$f(x) = 1/2 - x \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Funksjonsverdien $f(13{,}2)$ er:

A: $-12{,}7$ **B:** $-0{,}7$ **C:** $0{,}7$ $\boxed{\textbf{D:}\ -0{,}3}$

Vi har $f(13{,}2) = f(1{,}2) = f(-0{,}8) = f(0{,}8) = (0{,}5 - 0{,}8) = -0{,}3$. Riktig svaralternativ er **D**.

Oppgave 8 Funksjonen $f(x)$ med periode 2π, er gitt ved at $f(x) = e^x$ for $-\pi < x \leq \pi$.



I punktet $x = \pi$ konvergerer denne funksjonens Fourierrekke mot verdien:

A: π $\boxed{\textbf{B:}\ \dfrac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}}$ **C:** e^{π} **D:** $e^{-\pi}$

Funksjonen er stykkevis kontinuerlig og den har både høyre og venstre deriverte overalt. Derfor konvergerer Fourierrekken mot $\frac{1}{2}\left(f(\pi - 0) + f(\pi + 0)\right) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$. Riktig svaralternativ er **B**.

Oppgave 9 Det oppgis at den periodiske funksjonen i oppgave 8 har Fourierrekken

$$f(x) \sim \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi} + \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\cos nx - n \sin nx}{1 + n^2} \right)$$

Summen av rekka $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2}$ er:

$\boxed{\textbf{A:}\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(e^{\pi} + e^{-\pi})}{(e^{\pi} - e^{-\pi})}}$ **B:** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{(e^{\pi} + e^{-\pi})}$ **C:** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(e^{\pi} + e^{-\pi})}{(e^{\pi} - e^{-\pi})}$ **D:** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{(e^{\pi} + e^{-\pi})}$

Vi summerer Fourierrekken for $x = \pi$. Da får vi ifølge oppgave 8

$$\frac{(e^\pi + e^{-\pi})}{2} = \frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{2\pi} + \frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\pi}{1+n^2} = \frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{2\pi} + \frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}.$$

Litt algebra viser at summen er $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{(e^\pi + e^{-\pi})}{(e^\pi - e^{-\pi})}$. Riktig svaralternativ er **A**.

Oppgave 10 Fourier transformen til funksjonen f definert som

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

er

$$\boxed{\textbf{A:}\quad \hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin \pi w}{w}} \qquad \textbf{B:}\quad \hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin^2 \pi w}{w^2}$$

$$\textbf{C:}\quad \hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1-\cos \pi w}{w} \qquad \textbf{D:}\quad \hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1-\cos \pi w}{w^2}$$

Siden f er en likefunksjon er Fouriertransformen gitt ved

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(v)\cos vw dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \cos vw dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos \pi w}{w}$$

og svaret er **A**.