NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4135 MATEMATIKK D

Midtsemesterprøve 29. september 2005 kl. 08:15
Tid: 90 minutter

Hjelpemidler: Enkel kalkulator (HP30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kreyszig: "*Advanced Engineering Mathematics*"
NB: Sett *ett* kryss for hver oppgave på svararket. *Ikke* skriv på oppgavearket!

Oppgave 1 Den Laplacetransformerte til funksjonen $e^t \sin t$ er:

A: $\dfrac{1}{s(s^2-2s+2)}$ **B:** $\dfrac{s}{s^2-2s+2}$

C: $\dfrac{s+1}{s^2+2s+2}$ **D:** $\boxed{\dfrac{1}{s^2-2s+2}}$

Vi har $\mathcal{L}(\sin(t)) = \dfrac{1}{s^2+1}$ Første skifteteorem gir $\mathcal{L}(e^t \sin(t)) = \dfrac{1}{(s-1)^2+1} = \dfrac{1}{s^2-2s+2}$

og svaret er **D**.

Oppgave 2 Den Laplacetransformerte av funksjonen $t \cos t$ er:

A: $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$ **B:** $\boxed{\dfrac{1}{(s^2+1)} - \dfrac{2}{(s^2+1)^2}}$ **C:** $\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}$ **D:** $\dfrac{e^{-s}s}{s^2+1}$

Vi har $\mathcal{L}(\cos(t)) = \dfrac{s}{s^2+1}$ Derivasjon av transformen gir $\mathcal{L}(t\cos(t)) = -\dfrac{d}{ds}\dfrac{s}{(s-1)^2+1} =$
$\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2} = \dfrac{1}{(s^2+1)} - \dfrac{2}{(s^2+1)^2}$.

og svaret er **B**.

Oppgave 3 Den inverse Laplacetransformen til funksjonen $F(s) = \dfrac{1}{s^2}\left(1 - e^{-2s}\right)$ er:

A: $t^2(1-u(t-2))$ **B:** $t(1-u(t-2))$

C: $\boxed{t-(t-2)u(t-2)}$ **D:** $t^2-(t-2)^2u(t-2)$

Riktig svaralternativ er **C**.

Oppgave 4 Gitt initialverdiproblemet $y'' - 2y' + y = e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Den Laplacetransformerte $Y(s)$ av løsningen $y(t)$ er:

$$\boxed{\textbf{A:}\quad Y(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{(s-1)^3}} \qquad \textbf{B:}\quad Y(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{(s-1)^3}$$

$$\textbf{C:}\quad Y(s) = \frac{e^{-s}(s-1)}{(s-1)^2} \qquad \textbf{D:}\quad Y(s) = \frac{e^{-s}(s+1)}{(s+1)^2}$$

Vi transformerer ligningen og får

$$\begin{aligned} s^2Y - s - 1 - 2(sY - 1) + Y &= \frac{1}{s-1} \\ (s^2 - 2s + 1)Y &= s - 1 + \frac{1}{s-1} \\ Y &= \frac{s^2 - 2s + 2}{(s-1)^3} \end{aligned}$$

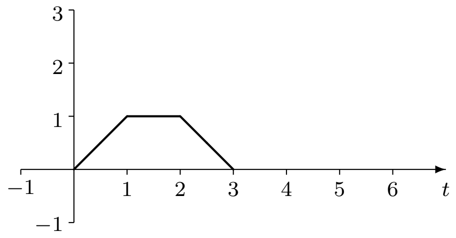
som viser at riktig svaralternativ er **A**.

Oppgave 5 La funksjonen f være gitt ved

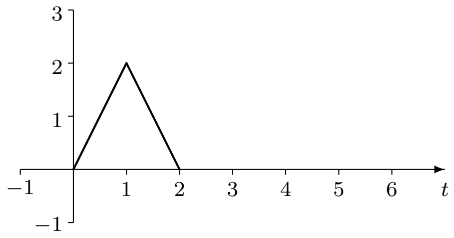
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad 0 < t < 1, \\ 0 & \quad \text{ellers,} \end{cases}$$

Hvilken av grafene under er grafen til konvolusjonen $g = f * f$?

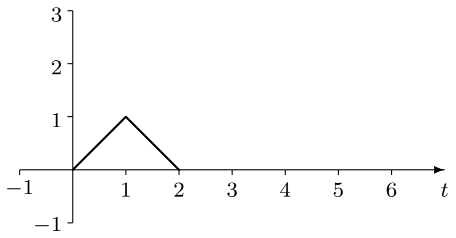
A:



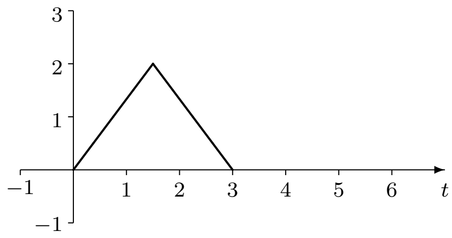
B:



C:



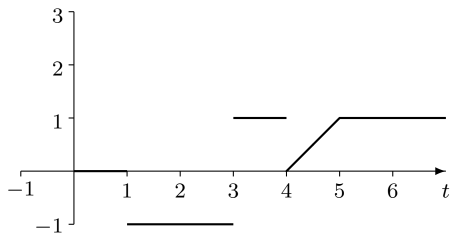
D:



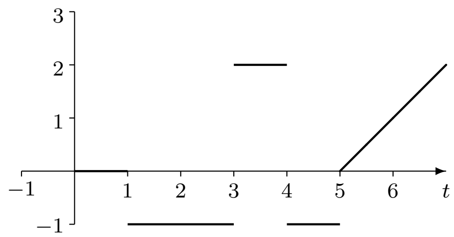
Vi har $f(t) = u(t) - u(t-1)$, så $F(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$. Derfor er $G(s) = \frac{1}{s^2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$, så $(f * f)(t) = t - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$. Svaret er **C**.

Oppgave 6 La $r(t) = -u(t-1) + 2u(t-3) + (t-5)u(t-4) - (t-5)u(t-5)$, der $u(t)$ er trinnfunksjonen (også kalt Heavisidefunksjonen eller "unit step function"). Hvilken av de følgende figurene viser grafen til $r(t)$?

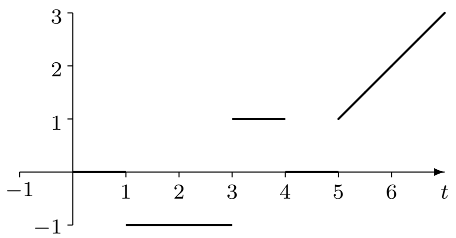
A:



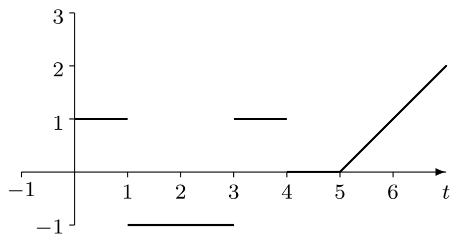
B:



C:



D:



Svaret er **A**.

Oppgave 7 En odde, periodisk funksjon f, med periode 2 er definert som

$$f(x) = x(1-x) \quad \text{for} \quad 0 \le x \le 1.$$

Funksjonsverdien $f(5{,}4)$ er:

A: 23,76 **B:** $-23{,}76$ **C:** 0,24 $\boxed{\textbf{D:} \quad -0{,}24}$

Vi har $f(5{,}4) = f(1{,}4) = -f(-1{,}4) = -f(0{,}6) = -0{,}6 \cdot 0{,}4 = -0{,}24$. Riktig svaralternativ er **D**.

Oppgave 8 Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin|x| & \text{for} \quad |x| < \pi \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi har at $f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw$, der $A(w)$ er:

$\boxed{\textbf{A:} \quad A(w) = \frac{2}{\pi}\frac{1+\cos\pi w}{1-w^2}}$ **B:** $A(w) = \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos\pi w}{1+w^2}$

C: $A(w) = \frac{2}{\pi}\frac{1-\sin^2\frac{\pi}{2}w}{1-w^2}$ **D:** $A(w) = \frac{2}{\pi}\frac{1+\sin^2\frac{\pi}{2}w}{1+w^2}$

Siden f er en likefunksjon er $A(w)$ gitt ved integralet $A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos wx dx$. Ved å benytte formlene for sinus til til en sum av to vinkler kan dette skrives om til $A(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin(w+1)x - \sin(w-1)x)dx = \frac{2}{\pi}\frac{1+\cos\pi w}{1-w^2}$

som viser at riktig svaralternativ er **A**.

Oppgave 9 Det oppgis at Fourierintegralet til funksjonen f definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for} \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad \text{er} \quad \int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw, \quad \text{der} \quad A(w) = \frac{2}{\pi}\frac{\cos\frac{\pi}{2}w}{1-w^2}.$$

Verdien av integralet $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi}{2}w}{1-w^2}\,dw$ er:

A: 0 **B:** 1 $\boxed{\textbf{C:} \quad \frac{\pi}{2}}$ **D:** π

Vi har $f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx dw$, altså er $f(0) = 1 = \int_0^\infty \frac{2}{\pi}\frac{\cos\frac{\pi}{2}w}{1-w^2}dw$

som viser at riktig svaralternativ er **C**.

Oppgave 10 Det oppgis at Fouriertransformen til funksjonen f definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{for} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad \text{er} \quad \hat{f}(w) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin w - w \cos w}{w^3}.$$

Verdien av integralet $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin w - w \cos w}{w^3}\, dw$ er:

A: $\dfrac{\pi^2}{6}$ $\quad$ $\boxed{\textbf{B:} \quad \dfrac{\pi}{4}}$ $\quad$ **C:** $\dfrac{\pi}{2e}$ $\quad$ **D:** 0

Vi har at $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{ixw} dw$, så siden $\hat{f}$ er en likefunksjon er

$$1 = f(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin w - w \cos w}{w^3} dw$$

.

Litt algebra viser at riktig svaralternativ er **B**.