TMA4135 MATEMATIKK D

Midtsemesterprøve 11. oktober 2005 kl. 17:15
Tid: 90 minutter

Hjelpemidler: Enkel kalkulator (HP30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kreyszig: "*Advanced Engineering Mathematics*"

NB: Sett *ett* kryss for hver oppgave på svararket. *Ikke* skriv på oppgavearket!

Oppgave 1 Laplacetransformen til funksjonen $\sin(\pi t)u(t-1)$ er

A: $\dfrac{\pi(s-1)}{s^2+\pi^2}\,e^{-s}$ **B:** $\dfrac{\pi s}{s^2+\pi^2}\,e^{-s}$ **C:** $\dfrac{\pi}{s^2+\pi^2}\,e^{-s}$ $\boxed{\textbf{D:}\ \dfrac{-\pi}{s^2+\pi^2}\,e^{-s}}$

Vi har at $\sin(\pi t) = -\sin(\pi t - \pi)$. Dermed blir

$$\mathcal{L}\{\sin(\pi t)u(t-1)\} = e^{-s}\mathcal{L}\{-\sin(\pi t)\} = -e^{-s}\frac{\pi}{s^2+\pi^2}$$

Svaret er **D**.

Oppgave 2 Den inverse Laplacetransformen til funksjonen $F(s) = \dfrac{2}{s^2-2s}$ er

A: $e^t - 2$ **B:** e^{2t} **C:** $e^{-2t} - 1$ $\boxed{\textbf{D:}\ e^{2t} - 1}$

Siden $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{2}{s-2}\} = 2e^{2t}$ må $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{2}{s-2}\} = \displaystyle\int_0^t 2e^{2\tau}d\tau = e^{2t}-1$. Svaret er **D**.

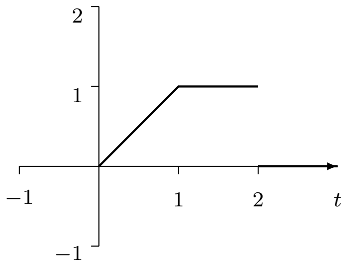
Oppgave 3 Gitt initialverdiproblemet $y' - 2y = 4t$, $y(0) = 3$. Laplacetransformen $Y(s)$ av løsningen $y(t)$ er gitt ved

$\boxed{\textbf{A:}\ \dfrac{3s^2+4}{s^2(s-2)}}$ **B:** $\dfrac{3s^2-4}{s^2(s+2)}$ **C:** $\dfrac{3s^2+4}{s(s-2)}$ **D:** $\dfrac{3s^2-4}{s(s+2)}$

Den Laplacetransformerte av ligningen er $sY(s) - 3 - 2Y(s) = \dfrac{4}{s^2}$ med løsning $Y(s) = \dfrac{3s^2+4}{s^2(s-2)}$. Svaret er **A**.

Oppgave 4

Laplacetransformen av funksjonen til høyre er:



A: $\dfrac{s - e^{s} - se^{2s}}{s^2}$ **B:** $\dfrac{1 - e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}$ $\boxed{\textbf{C:} \ \dfrac{1 - e^{-s} - se^{-2s}}{s^2}}$ **D:** $\dfrac{s - s^2e^{s} + e^{2s}}{s^2}$

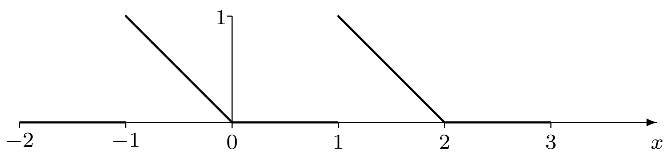
Oppgave 5 Laplacetransformen $Y(s)$ av funksjonen $y(t) = e^{-t} \star e^{t}$ er

A: $\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{s+1}$ $\boxed{\textbf{B:} \ \dfrac{1}{s^2-1}}$

C: $\dfrac{e^{s}}{s-1}$ **D:** $\dfrac{e^{-s}}{s+1}$

Vi har at $\mathcal{L}\{e^{-t} \star e^{t}\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}\mathcal{L}\{e^{t}\} = \dfrac{1}{s+1}\dfrac{1}{s-1} = \dfrac{1}{s^2-1}$. Svaret er **B**.

Oppgave 6 La $f(x)$ være en funksjon med periode 2, og med graf som vist på figuren:



I punktet $x = 1$ konvergerer denne funksjonens Fourierrekke mot verdien:

A: 0 $\boxed{\textbf{B:} \ \dfrac{1}{2}}$ **C:** 1 **D:** −2

Funksjonen er stykkevis kontinuerlig og den har både høyre og venstre deriverte overalt. Derfor konvergerer Fourierrekken mot $\dfrac{1}{2}\left(f(1-0) + f(1+0)\right) = \dfrac{1}{2}$. Riktig svaralternativ er **B**.

Oppgave 7 Fourierrekken til funksjonen $f(x)$ definert i oppgave 6 er gitt som

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right).$$

Fourierkoeffisienten a_0 er

A: $\frac{\pi}{4}$ **B:** $\frac{1}{2\pi}$ **C:** 0 $\boxed{\textbf{D:}\ \frac{1}{4}}$

Funksjonen er periodisk med periode $2L$ med $L = 1$. Dvs. $a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} -x dx = \frac{1}{4}$. Svaret er **D**.

Oppgave 8 Funksjonen $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{for} \quad |x| \le 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Fourier integralet til $f(x)$ er gitt ved $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} A(w)\cos(wx)dw$ med $A(w)$ lik:

A: $\frac{1 + \cos w}{w^2}$ $\boxed{\textbf{B:}\ \frac{2}{\pi}\frac{1 - \cos w}{w^2}}$ **C:** $\frac{w}{1 - w^2}$ **D:** $\frac{2}{\pi}\frac{1}{1 - w^2}$

$f(x)$ er en like funksjon, altså er $A(w) = \displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos(wx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{1}(1-x)\cos(wx)dx = \frac{2}{\pi}\frac{1 - \cos w}{w^2}$. Svaret er **B**.

Oppgave 9 Det oppgis at Fouriertransformen til $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$, $a > 0$ er gitt ved $\hat{f}(w) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{e^{-a|w|}}{a}$.

Fouriertransformen til $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 + 4)^2}$ er gitt ved

$\boxed{\textbf{A:}\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{i\,w\,e^{-2|w|}}{4}}$ **B:** $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-2iw}}{4w}$ **C:** $\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-4w^2}}{4}$ **D:** $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{i\,e^{-2|w|}}{4w}$

$f(x) = \dfrac{g'(x)}{2}$ der $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2^2}$. Dermed er $\mathcal{F}\{f(x)\} = \dfrac{iw}{2}\mathcal{F}\{g(x)\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{iwe^{-2|w|}}{4}$. Svaret er **A**.

Oppgave 10 Fouriertransformen til funksjonen $f(x) = e^{-|x|}$ er gitt ved

A: $\dfrac{w}{w^2-1}$ **B:** $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{e^{iw}}{w^2+1}$ $\boxed{\textbf{C:}\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{1}{w^2+1}}$ **D:** $\dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{e^{-iw}}{w^2}$

$\mathcal{F}\{e^{-|x|}\} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(\int_{-\infty}^{0} e^{x-iwx}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x-iwx}dx\big) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{w^2+1}$. Svaret er **C**. Svaret kan også utledes fra hintet i oppgave 9.